离散数学丛书

有限反射群的不变式论

万哲先 编

上海交通大学出版社



责任编辑／冯　愈
封面设计／雨　风



ISBN7－313－01896－7/O·123
定价：10.50元

上海“九五”重点图书
离散数学丛书

有限反射群的不变式论

万哲先 著

上海交通大学出版社

有限反射群的不变式论

万哲先　著

上海交通大学出版社出版发行
上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030
电话　64281208　传真　64683798
全国新华书店经销
常熟市印刷二厂·印刷
开本:850×1168(mm) 1/32　印张:5.625　字数:146 千字
版次:1998 年 12 月　　第 1 版
印次:1998 年 12 月　　第 1 次
ISBN 7-313-01896-7/O·123
定价:10.50 元

内 容 提 要

本书共分三章:第一章主要介绍有限伪反射群不变式的一般理论;第二章着重介绍有限实反射群的分类;第三章进一步讨论有限反射群的不变式,特别对于每个不可约有限反射群都列出了它的一组基本不变式.各章之末均为习题,这些习题与正文构成了有机的整体.本书是作者根据自己的理解编写的,旨在引导读者进入目前较活跃的两个数学分支——反射群和不变式.

本书可供数学工作者和数学系高年级学生使用.只要具备大学线性代数和抽象代数的知识,即可阅读本书.

离散数学丛书编委会

序　言

对称函数的基本定理是数学中重要的经典定理：n个未定元的对称多项式一定可以表示成n个初等对称多项式的多项式，而且表法唯一．对称多项式实际上就是在对称群作用下不变的多项式，而对称群又可以看作是由欧氏空间中的反射生成的群．一个自然发生的问题是，对称函数的基本定理可不可以推广？特别是能不能推广到欧氏空间中反射生成的有限群？后者简称为有限反射群．Coxeter 于 1935 年完成了不可约有限反射群的分类，1951 年他就对一个个的不可约有限反射群来研究这个问题．1954 年 Shephard-Todd 完成了不可约有限复反射群的分类以后，又对一个个的不可约有限复反射群来研究这个问题．他们得到了正面的结果．1955 年 Chevalley 对任意有限反射群给出了统一的证明：作用在n维欧氏空间上的有限反射群的任一不变多项式，都可以表示成n个基本不变多项式的多项式，而且表法唯一．后来这一结果又被推广到有限伪反射群，这是不变式论中精彩的篇章．

本书试图先对有限伪反射群的不变式论作一介绍，这就是本书第一章的内容，然后再落实到有限反射群上去．为了这个目的，本书第二章对有限反射群的分类作了详细的介绍．有限反射群的分类与李群、李代数理论有极为密切的关系，但限于篇幅，本书未作涉及．本书第三章进一步讨论有限反射群的不变式，特别对于每个不可约有限反射群都列出了它的一组基本不变式．

读者只要具备大学线性代数和抽象代数的知识，即可阅读本书，本书所需要的超出这两门课程的知识，都在书中作了详细介

绍，本书各章之末均为习题，这些习题与正文构成了有机的整体，读者应重视.希望读者通过阅读本书能产生进一步钻研不变式或 Coxeter 群的兴趣，它们都是当前值得注意的研究对象.

万哲先

1997 年 5 月

目　　录

第一章　有限伪反射群的不变式论

本章主要介绍有限伪反射群不变式的一般理论. 对于这一理论,有限维向量空间上的多项式函数代数的知识是必需的基础知识,在 1.1 节中作了介绍. 1.2 节主要介绍 Hilbert 和 Noether 的关于有限群不变式的有限生成定理,了解这些内容所需要的交换代数知识也附带作了介绍. 1.3 节介绍了 Molien 公式. 1.4 节是本章的主体,有限伪反射群不变式的 Chevalley 定理和 Shephard-Todd 定理是这一节的主要内容. 1.5 节介绍了有限伪反射群的相对不变式. 1.6 节介绍了关于有限伪反射群的次数的 Solomon 定理,证明这个定理所需要的有关微分 p-齐式的一些性质也一并作了介绍.

§1.1　向量空间上的多项式函数代数

设 F 是域,n 是正整数,而 V 是 F 上 n 维向量空间. 设 f 是定义在 V 上而在 F 中取值的函数,即

$$f:\quad V\to F,$$
$$\lambda\to f(\lambda).$$

所有这种函数的全体记作 F^V. 设 $f,g\in F^V$,而 $a\in F$,定义

$$(f+g)(\lambda)=f(\lambda)+g(\lambda),$$
$$(fg)(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda),$$

和

$$(af)(\lambda)=af(\lambda).$$

不难证明,F^V 对于上面规定的加法、乘法和纯量乘法来说组成一个 F-代数(即域 F 上的代数),叫做 V 上的函数代数. 按下式来定义 $\underline{1}\in F^V$:

$$\underline{1}(\lambda) = 1 \quad 对所有 \lambda \in V,$$

显然$\underline{1}$是 F-代数 F^V 的单位元.

设 $f \in F^V$,如果对任意 $\lambda, \mu \in V$ 和 $a, b \in F$ 都有

$$f(a\lambda + b\mu) = af(\lambda) + bf(\mu),$$

f 就叫做定义在 V 上的线性函数.易证定义在 V 上的线性函数的全体对于上段定义的加法和纯量乘法来说,组成 F 上的一个向量空间(习题 1.1),记作 V^*,叫做 V 的对偶空间.设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基,按以下诸式来定义 V 上的线性函数 $x_1, \cdots, x_n$:

$$x_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n),$$

那么易证 $x_1, \cdots, x_n$ 是 V^* 的一组基(习题 1.1),叫做 V 的基 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 在 V^* 中的对偶基.因此 V^* 也是 F 上的 n 维向量空间,F^V 中形如

$$\sum_{i_1, \cdots, i_n} a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad a_{i_1 \cdots i_n} \in F$$

的有限和式叫做定义在 V 上而在 F 中取值的多项式函数,它们组成的集合是 F^V 的一个 F-子代数,叫做 V 上的多项式函数代数,记作 $F[x_1, \cdots, x_n]$.

如果 $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n'$是 V 的另一组基,那么有

$$\varepsilon_j' = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i t_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \quad t_{ij} \in F,$$

而

$$T = (t_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \in GL_n(F),$$

这里 $GL_n(F)$是 F 上的 n 级一般线性群,它是由 F 上所有的 $n \times n$ 非奇异矩阵之集对矩阵乘法组成的群(习题 1.2).设 $x_1', \cdots x_n'$是 $\varepsilon_1', \cdots \varepsilon_n'$在 V^* 中的对偶基,那么不难证明

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j', \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1-1}$$

(习题 1.3).也有 $F[x_1', \cdots, x_n'] \subset F^V$.由(1-1)式立刻推出 $F[x_1, \cdots, x_n] = F[x_1', \cdots, x_n']$,即 V 上的多项式函数代数与 V 的基的选

取无关,因此也把它记作 $F[V^*]$.

命题 1.1　设 F 是域,$X_1,\cdots,X_n$ 是 F 上的 n 个未定元,$F[X_1,\cdots,X_n]$是 F 上的 n 元多项式代数,那么映射

$$F[X_1,\cdots,X_n]\to F[x_1,\cdots,x_n],$$

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n}X_1{}^{i_1}\cdots X_n{}^{i_n}\mapsto \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n}x_1{}^{i_1}\cdots x_n{}^{i_n}$$

是代数同态.如果 F 是无限域,那么上面这个映射是同构.

证　第一个断言是显然的.要证明第二个断言,只要证明 $x_1,\cdots,x_n$在 F 上代数无关就行了.对 n 作归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,因为一个未定元 X_1 的 m 次多项式顶多有 m 个根,而 F 是无限域,所以 x_1 在 F 上代数无关.设 $n>1$ 而第二个断言对 n-1 成立.假定 $x_1,\cdots,x_n$ 在 F 上代数相关,即它们适合一个非零多项式 $f(X_1,\cdots,X_n)$.可以把 $f(X_1,\cdots,X_n)$写成

$$f(X_1,\cdots,X_n)=f_0(X_1,\cdots,X_{n-1})+f_1(X_1,\cdots,X_{n-1})X_n+\cdots$$
$$+f_m(X_1,\cdots,X_{n-1})X_n^m,$$

其中 $f_i(X_1,\cdots,X_{n-1})(i=0,1,\cdots,m)$都是 $n-1$ 个未定元 $X_1,\cdots,X_{n-1}$的多项式,而 $f_m(X_1,\cdots,X_{n-1})\neq 0$,于是

$${}_0(x_1,\cdots,x_{n-1})+f_1(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n+\cdots+f_m(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^m=0. \tag{1-2}$$

根据归纳法假设,$f_m(x_1,\cdots,x_{n-1})\neq 0$,总能在 V 中选一个向量 $\lambda=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}$使 $f_m(x_1(\lambda),\cdots,x_{n-1}(\lambda))=f_m(a_1,\cdots,a_{n-1})\neq 0$.那么对任意 $a_n\in F$,(1-2)式左方在 $\lambda+a_n\varepsilon_n$ 上取的值必为 0,即

$$f_0(a_1,\cdots,a_{n-1})+f_1(a_1,\cdots,a_{n-1})a_n+\cdots+f_m(a_1,\cdots,a_{n-1})a_n^m=0,$$

这与 F 是无限域的假设相违.　□

因此,如果 F 是无限域,利用命题 1.1,可以把与 V 上一个多项式函数相应的多项式的次数定义为这个多项式函数的次数,而且这个多项式函数的次数的概念与 V 的基的选取无关,因而也有

V 上齐次多项式函数的概念. 用 $F[V^*]_d$ 表示定义在 V 上的 d 次齐次多项式函数所组成的 F-子空间,则

$$F[V^*] = F[V^*]_0 \oplus F[V^*]_1 \oplus \cdots \oplus F[V^*]_d \oplus \cdots,$$

其中$F[V^*]_0=F$,$F[V^*]_1=V^*$,而且对任意正整数 i 和 j,都有

$$F[V^*]_i F[V^*]_j \subset F[V^*]_{i+j}.$$

一般说来,设 A 是 F-代数,而 A 可以分解成 F-子空间 $A_d(d=0,1,\cdots)$的直和

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_i \oplus \cdots,$$

其中 $A_0 = F$, $A_dA_e \subset A_{d+e} \forall d, e = 0, 1, \cdots$, 那么就说 A 是分次 F-代数,A_d 叫做 A 的 d 次成分. 因此当 F 是无限域时,$F[V^*]$是分次 F-代数. 设 A 是分次 F-代数,定义 A_d 中元素的次数为 d;设 $f\in A_d$,记 $\deg f=d$. 根据这个定义,任意非负整数都是 0 的次数. 任意 $f\in A$ 可以唯一地表成和 $f=f_0+f_1+\cdots+f_d+\cdots$,其中 $f_i\in A_i(i=0,1,\cdots)$,而只有有限个 $f_d\neq 0$. f_d 叫做 f 的 d 次齐次分量.

更广一些,如果 V 是域 F 上的向量空间,而 V 可以分解成 F-子空间 $V_d(d=0,1,\cdots)$的直和

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_d \oplus \cdots,$$

那么就说 V 是 F 上的分次向量空间,V_d 叫做 V 的 d 次成分,V_d 中的向量叫 d 次向量. 任意 $v\in V$ 可以唯一地表成和 $v=v_0+v_1+\cdots+v_d+\cdots$,其中 $v_d\in V_d(d=0,1,\cdots)$,而只有有限个 $v_d\neq 0$. v_d 叫 v 的 d 次齐次分量.

§1.2 有限群的不变式 Hilbert-Nother 有限生成定理

仍设 V 是域 F 上的 n 维向量空间. V 上所有可逆线性变换之集对映射的合成组成一群,叫做 V 上的一般线性群,记作 $GL(V)$(习题 1.2). 设 G 是 $GL(V)$的有限子群,对任意 $\sigma\in G$ 和 $f\in F[V^*]$,定义

$$\sigma\cdot f(\lambda) = f(\sigma^{-1}\lambda) \quad \forall\ \lambda\in V,$$

则 $\sigma \cdot f \in F[V^*]$. 实际上还可以证明,当 $f \in F[V^*]_d$ 时,$\sigma \cdot f \in F[V^*]_d$. 当 $d=0$ 时,这是显然的. 当 $d=1$ 时,$F[V^*]_1 = V^*$. 设 $f \in V^*$,那么对任意 $\lambda, \mu \in V$ 和 $a \in F$,

$$\begin{aligned}\sigma \cdot f(\lambda+\mu) &= f(\sigma^{-1}(\lambda+\mu)) = f(\sigma^{-1}\lambda + \sigma^{-1}\mu) \\ &= f(\sigma^{-1}\lambda) + f(\sigma^{-1}\mu) = (\sigma \cdot f)(\lambda) + (\sigma \cdot f)(\mu), \\ \sigma \cdot f(a\lambda) &= f(\sigma^{-1}(a\lambda)) = af(\sigma^{-1}\lambda) \\ &= a(\sigma \cdot f(\lambda)) = ((a\sigma) \cdot f)(\lambda),\end{aligned}$$

因此 $\sigma \cdot f \in V^*$. 再考察 $d>1$ 的情形. 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基,$x_1, \cdots, x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基,只要对于单项式 $cx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$,其中 $c \in F, c \neq 0$ 而 $m_1 + \cdots + m_n = d$ 来证明 $\sigma \cdot (cx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) \in F[V^*]_d$ 就行了. 对任意 $\lambda \in V$,计算

$$\begin{aligned}\sigma \cdot (cx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n})(\lambda) &= cx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}(\sigma^{-1}\lambda) \\ &= c\,(x_1(\sigma^{-1}\lambda))^{m_1} \cdots (x_n\,(\sigma^{-1}\lambda))^{m_n} \\ &= c\,(\sigma \cdot x_1(\lambda))^{m_1} \cdots\ (\sigma \cdot x_n(\lambda))^{m_n} \\ &= c\,(\sigma \cdot x_1)^{m_1} \cdots\ (\sigma \cdot x_n)^{m_n}(\lambda),\end{aligned}$$

因此 $\sigma \cdot (cx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) = c\,(\sigma \cdot x_1)^{m_1} \cdots (\sigma \cdot x_n)^{m_n}$. 根据 $d=1$ 的情形,$\sigma \cdot x \in V^*$,又因为 $F[V^*]$是分次 F-代数,所以 $c\,(\sigma \cdot x_1)^{m_1} \cdots (\sigma \cdot x_n)^{m_n} \in F\,[V^*]_d$.

这样就定义了一个映射

$$\begin{gathered}G \times F[V^*] \to F[V^*], \\ (\sigma, f) \mapsto \sigma \cdot f,\end{gathered} \tag{1-3}$$

而且它具有以下两条性质:

(i)　$(\sigma\sigma') \cdot f = \sigma \cdot (\sigma' \cdot f), \forall\ \sigma, \sigma' \in G, f \in F[V^*]$.

(ii)　$1 \cdot f = f$,对于 G 的单位元 1 和任意 $f \in F[V^*]$.

(ii)是显然的. 只要验证(i)即可. 对任意 $\lambda \in V$,$(\sigma\sigma') \cdot f(\lambda) = f((\sigma\sigma')^{-1}\lambda) = f(\sigma'^{-1}\sigma^{-1}\lambda) = (\sigma' \cdot f)(\sigma^{-1}\lambda) = (\sigma \cdot (\sigma' \cdot f))(\lambda)$. 所以(i)成立. 故映射(1-3)叫做群 G 在 $F[V^*]$上的一个作用.

设 $f \in F[V^*]$,如果对任意 $\sigma \in G$ 都有 $\sigma \cdot f = f$,f 就叫 G 的

一个不变式，简称 G-不变式.

例 1.1 设 $V=F^2$ 是域 F 上的 2 维列向量空间，而

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

是作用在 V 上的 4 阶循环群. 令 $\varepsilon_1={}^t(1,0)$和 $\varepsilon_2={}^t(0,1)$是 V 的一组基，x_1,x_2 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的对偶基. 那么 $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2x_2^2$, $x_1^3x_2-x_1x_2^3$ 都是G-不变式. □

把 $F[V^*]$中 G-不变式的全体记作 $F[V^*]^G$，即

$F[V^*]^G=\{f\in F[V^*]\mid\sigma\cdot f=f$ 对所有 $\sigma\in G$ 都成立$\}$.

设 $f_1,f_2\in F[V^*]$，那么对任意 $\lambda\in V$ 都有

$$\begin{aligned}(\sigma\cdot(f_1f_2))(\lambda)&=(f_1f_2)(\sigma^{-1}\lambda)=f_1(\sigma^{-1}\lambda)f_2(\sigma^{-1}\lambda)\\&=(\sigma\cdot f_1)(\lambda)(\sigma\cdot f_2)(\lambda),\end{aligned}$$

因此

$$\sigma\cdot(f_1f_2)=(\sigma\cdot f_1)(\sigma\cdot f_2).$$

由此推出$F[V^*]^G$ 是 $F[V^*]$的子代数. 显然，$F\subset F[V^*]^G$. 当 F 是无限域时，把 d 次齐次 G-不变式之集记作$F[V^*]_d^G$，那么

$$F[V^*]_d^G=F[V^*]^G\cap F[V^*]_d.$$

显然也有

$$F[V^*]^G=F[V^*]_0^G\oplus F[V^*]_1^G\oplus\cdots\oplus F[V^*]_d^G\oplus\cdots,$$

其中$F[V^*]_0^G=F$，而

$$F[V^*]_i^G\cdot F[V^*]_j^G\subset F[V^*]_{i+j}^G,$$

因此$F[V^*]^G$ 也是分次 F-代数.

这一节主要介绍 Hilbert, Noether 关于$F[V^*]^G$ 的有限生成定理，首先介绍交换代数的一些知识.

设 R 是有单位元的交换环，再设$\{m_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$是 R 中元素的一个非空集合，其中 Ω 是足码集，R 中可表成形如 $\sum\limits_\alpha r_\alpha m_\alpha(r_\alpha\in R)$

的有限和的元素所组成的集合是 R 的理想，叫做由 $\{m_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ 在 R 中生成的理想，记作 $(m_\alpha; \alpha \in \Omega)$. 反过来，设 I 是 R 的理想，如果 I 有一个子集 $\{m_\alpha | \alpha \in \Omega\}$，而它在 R 中生成的理想就是 I，即 $I=(m_\alpha; \alpha \in \Omega)$，就说 I 是由 $\{m_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ 生成的理想，当 Ω 是有限集时，就说 I 是有限生成的理想. 设 $\Omega = \{1, \cdots, n\}$，那么也记 $I=(m_1, \cdots m_n)$.

如果环 R 的每个理想都是有限生成的，R 就叫做 Noether 环. 因为域 F 只有两个理想，F 本身和零理想 (0)，而 $F=(1)$ 和 (0) 都由一个元素生成，所以域 F 是 Nother 环. 整数环 $\mathbf{Z}$ 和域 F 上一个未定元 X 的多项式环 $F[X]$ 是主理想整环，因此它们也都是 Noether 环，更进一步有

定理 1.2(Hilbert 基定理)　设 R 是 Noether 环，那么 R 上一个未定元 X 的多项式环 $R[X]$ 也是 Noether 环.

证　设 I 是 $R[X]$ 的任一理想，要证明 I 是有限生成的. 用 I_0 表由 I 中多项式的首项系数组成的 R 的理想. 因 R 是 Noether 环，I_0 由有限个元素生成，设这有限个元素是 $a_1, \cdots, a_m$. 选 I 中多项式 $f_1, \cdots, f_m$，它们分别以 $a_1, \cdots, a_m$ 为首项系数. 再设 $d=\max\{\deg f_1, \cdots, \deg f_m\}$. 设 $f \in I$，如果 $\deg f \geqslant d$，因为 f 的首项系数属于 I_0，所以从 f 减去 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 的一个 R-线性组合(即系数属于 R 的线性组合)之后，可以降低 f 的次数，这样最后就得到一个次数 $<d$ 的多项式.

对任一 $i(0 \leqslant i \leqslant d-1)$，用 I_i 表 I 中 i 次多项式的首项系数所组成的 R 的理想. 因为 R 是 Noether 环，I_i 由有限个元素生成，设这有限个元素是 $a_{i_1}, \cdots, a_{im_i}$. 选 I 中 i 次多项式 $f_{i1}, \cdots, f_{im_i}$，它们分别以 $a_{i1}, \cdots, a_{im_i}$ 为首项系数，显然有

$$I=(f_1, \cdots, f_m, f_{d-1,1}, \cdots, f_{d-1,m_{d-1}}, \cdots, f_{01}, \cdots, f_{0m_0}). \qquad \square$$

系理 1.3　设 F 是域，$X_1, \cdots, X_n$ 是 F 上 n 个未定元，那么

$F[X_1,\cdots,X_n]$是 Noether 环.

设 A 是 F-代数,如果 A 中有有限个元素 $a_1,\cdots,a_n$,使得 A 中任一元素都可以表成 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} c_{i_1\cdots i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n},$$

其中和是有限和而系数 $c_{i_1\cdots i_n}\in F$,那么 A 就叫做有限生成的 F-代数,并记 $A=F[a_1,\cdots,a_n]$. 注意并不要求 $a_1,\cdots,a_n$ 在 F 上代数无关,因此 $F[a_1,\cdots,a_n]$是 F 上 n 个未定元的多项式环的同态像. 显然有

命题 1.4 Noether 环的同态像也是 Noether 环. □

因此有

系理 1.5 设 F 是域而 A 是有限生成的 F-代数,那么 A 是 Noether 环. □

现在叙述并证明关于有限群不变式的有限生成定理.

定理 1.6(Hilbert-Noether) $F[V^*]^G$ 是有限生成的 F-代数.

证(Hilbert,1890) 假定 F 的特征为 0. 令

$$F[V^*]_+^G = F[V^*]_1^G \oplus F[V^*]_2^G \oplus \cdots \oplus F[V^*]_d^G \oplus \cdots,$$

并把 $F[V^*]_+^G$ 在 $F[V^*]$中生成的理想记作 I. 根据命题 1.1, $F[V^*]$与 n 个未定元的多项式环同构,所以根据 Hilbert 基定理,I 由有限个元素 $f_1,\cdots,f_m$ 生成,并不妨设它们都是 G 的次数$\geqslant 1$ 的齐次不变式.

在 $F[V^*]$上引进平均算子

$$z = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma,$$

这里$|G|$表示群 G 的阶. 显然 z 是 $F[V^*]$上的线性算子. 对于 $f\in F[V^*]$,令 $\mathcal{J} = z\cdot f$,那么 $\mathcal{J}\in F[V^*]^G$;对于 $f\in F[V^*]$,

$h \in F[V^*]^G$，有$\widetilde{fh} = \tilde{f}h$.

设 $f \in F[V^*]_n^G$，对 f 的次数 n 作归纳法来证明 f 可以表成 $f_1, \cdots f_m$的多项式. 当 $n=0$ 时，这是显然的. 现在设 $n>0$，可以把 f 表成

$$f = h_1 f_1 + \cdots + h_m f_m, \quad h_1, \cdots, h_m \in F[V^*].$$

将 $h_1 f_1, \cdots, h_m f_m$ 中次数不等于 n 的项彼此相消以后，可以假设 $h_1, \cdots h_m$都是齐次式. 将平均算子作用到上式双方，得

$$f = \tilde{h}_1 f_1 + \cdots + \tilde{h}_m f_m.$$

显然 $\tilde{h}_1, \cdots, \tilde{h}_m$ 都是 G 的齐次不变式而 $\deg \tilde{h}_i = \deg f - \deg f_i < n$. 根据归纳假设，$\tilde{h}_1, \cdots, \tilde{h}_m$ 可以表成 $f_1, \cdots, f_m$ 的多项式，所以 f 也可以. □

Hilbert 的有限生成定理和他的基定理刚刚出现的时候，有的数学家认为是神学，也有数学家认为 Hilbert 结束了不变式论的生命. 这都是不正确的. 当然 Hilbert 给出的证明是存在性证明，而不是构造性的，它们都是非常好的数学；而此后不变式论仍在不断地发展.

Hilbert 给出的定理 1.6 的证明并没有说明用多少个 $F[V^*]^G$ 中的元素就可以生成 $F[V^*]^G$. 后来 Noether 给了定理 1.6 另一个证明，这个证明给出了有限个明确的不变式，它们生成 $F[V^*]^G$，而这个个数也可以计算. 为了介绍 Noether 的证明，先证

引理 1.7　设 F 的特征为 0，n 和 N 都是正整数，$X_{ij}(1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n)$是 F 上的未定元，并记 $X_i = (X_{i1}, \cdots, X_{in})$，再设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$是非负整数组成的一个 n-数组，记 $|a| = a_1 + \cdots + a_n$，$X_i^a = X_{i1}^{a_1} \cdots, X_{in}^{a_n}$. 那么对任意非负整数 n-数组 $b = (b_1, \cdots, b_n)$，$\sum_{i=1}^{N} X_i^b$ 都是 $\sum_{i=1}^{N} X_i^a$ (其中 $|a| \leqslant N$)的多项式.

证　设 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是 F 上的 n 个未定元，那么对于任意正整数

$|b|$,定义

$$s_{|b|} = \sum_{i=1}^{N} (X_{i1}Y_1 + \cdots + X_{in}Y_n)^{|b|},$$

显然

$$s_{|b|} = \sum_{b_1,\cdots,b_n \geqslant 0, b_1+\cdots+b_n=|b|} \left(\sum_{i=1}^{N} X_{i1}^{b_1}\cdots X_{in}^{b_n}\right) Y_1^{b_1}\cdots Y_n^{b_n}. \qquad (1\text{-}4)$$

设 $b=(b_1,\cdots,b_n)$, $b_i\geqslant 0$ 而 $b_1+\cdots+b_n=|b|$,那么 $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^b = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{i1}^{b_1}\cdots X_{in}^{b_n}$ 就是 $s_{|b|}$ 中 $Y_1^{b_1}\cdots Y_n^{b_n}$ 的系数. 根据对称函数的基本定理,

$$s_{|b|} = f_{|b|}(s_1, s_2, \cdots, s_N), \qquad (1\text{-}5)$$

其中 $f_{|b|}$是 F 上 N 个未定元的多项式. 将

$$s_{|a|} = \sum_{a_1,\cdots,a_n \geqslant 0, a_1+\cdots+a_n=|a|} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^a\right) Y_1^{a_1}\cdots Y_n^{a_n},\ |a| = 1,2,\cdots,N$$

代入(1-5)式,再比较(1-4)式和(1-5)式右方 $Y_1^{b_1}\cdots Y_n^{b_n}$ 的系数,就得出 $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^b$ 都是$\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^a$ (其中$|a|\leqslant N$)的多项式. □

定理 1.6 的第二个证明(Noether,1916) 设 $f(x)$是 m 次齐次不变式,那么可将 $f(x)$表成

$$f(x) = \sum_{|b|=m} c_b x^b,$$

其中 $b=(b_1,\cdots,b_n)$, $b_i\geqslant 0$, $|b|=b_1+\cdots+b_n=m$, $c_b\in F$,而 $x^b=x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$. 令 $I_b(x)=\sum\limits_{\sigma\in G} (\sigma x)^b$,则

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} f(\sigma x) = \sum_{|b|=m} \frac{c_b}{|G|} I_b(x).$$

根据引理 1.7,$I_b(x)$可表成 $I_a(x)$($|a|\leqslant|G|$)的多项式,故 $f(x)$亦然. □

前面已经说了,Noether 的证明构造出了有限个明确的不变

式 $I_a(x)(|a|\leqslant|G|)$，这一共有$\binom{|G|+n}{n}$个次数$\leqslant|G|$的齐次不变式. 以对称群 $G=S_n$ 为例，当 $n\to\infty$ 时，齐次不变式的个数$\binom{n!+n}{n}\sim(n!)^{n-1}$，而根据对称多项式的基本定理，$n$ 个初等对称函数就生成 $F[V^*]^{S_n}$. 因此 Noёther 的证明给出的不变多项式的个数太多了.

仔细检查一下 Hilbert 和 Noether 给的定理 1.6 的证明就会发现它只适用于特征零的域(其实 Hilbert 的证明只要假定 F 是特征不能整除$|G|$的无限域). 后来，Noether 又给了定理 1.6 一个证明，它对于任意特征的域都适用，但它要用到更多的交换代数的知识.

设 R 是有单位元的交换环，而 M 是 R-模. 总假定，对任意 $m\in M$，$1m=m$. 假定 $m_1,\cdots,m_n$ 是 M 中有限个元素，使得 M 中任一元素 m 都是它们的 R-线性组合，即 $m=r_1m_1+\cdots+r_nm_n$，其中 $r_1,\cdots,r_n\in R$，那么就说 M 由这有限个元素 $m_1,\cdots,m_n$ 生成，也说 M 是有限生成的 R-模，并记 $M=Rm_1+\cdots+Rm_n$. 如果 R-模 M 的每个子 R-模都是有限生成的 R-模，M 就叫做 Noether-模. Hilbert 基定理可以推广如下：

命题 1.8 设 R 是 Noether 环，而 M 是有限生成的 R-模，那么 M 是 Noether R-模.

证 这命题的证明和 Hilbert 基定理的证明中后一部分相仿. 假定 M 由 $m_1,\cdots,m_n$ 在 R 上生成. 设 M_0 是 M 的任意子 R-模. 对任一 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，用 I_i 表 M_0 中可表成 $m_i,m_{i+1},\cdots,m_n$ 的 R-线性组合的那些元素的 m_i 的系数组成的 R 中的理想. 因 R 是 Noether 环，I_i 是由有限个元素生成，设这有限个元素是 $a_{i1},\cdots,a_{il_i}$. 选 M_0 中元素 $m_{i1},\cdots,m_{il_i}$，它们表成 $m_i,m_{i+1},\cdots,m_n$ 的 R-线性组合时，m_i 的系数分别是 $a_{i1},\cdots,a_{il_i}$，那么 $m_{11},\cdots,m_{1l_1},m_{21},\cdots,m_{2l_2},\cdots,m_{n1}$，

$\cdots, m_{nl_n}$ 这些元素就生成 M_0. □

设 R 是有单位元的交换环，S 是它的子环，并假定 S 含 R 的单位元. 如果 R 中有有限个元素 $a_1, \cdots, a_n$，使得 R 中每个元素都可以表成形如

$$\sum_{i_1, \cdots, i_n} s_{i_1 \cdots i_n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}, \quad s_{i_1 \cdots i_n} \in S,$$

的有限和，即表成 $a_1, \cdots, a_n$ 的多项式，而系数属于 S，那么就说 R 在 S 上有限生成，并记 $R = S[a_1, \cdots, a_n]$. 如果 R 中有有限个元素 $a_1, \cdots, a_n$，使得 R 中每个元素都可以表成 $a_1, \cdots, a_n$ 的 S-线性组合，就说 R 在 S 上有限，并记 $R = Sa_1 + \cdots + Sa_n$. 显然，如果 R 在 S 上有限，那么 R 在 S 上有限生成.

例如，设 $X_1, \cdots, X_n$ 是域 F 上的 n 个未定元，那么 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 在 F 上有限生成，但不在 F 上有限. 设 V 是 F 上的 n 维向量空间，那么 $F[V^*]$ 在 F 上有限生成. 如果 G 是 $GL(V)$ 的有限子群，$F[V^*]$ 在 $F[V^*]^G$ 上当然也有限生成，而定理 1.6 是说 $F[V^*]^G$ 在 F 上有限生成.

仍设 R 是有单位元的交换环，S 是 R 的子环，S 含 R 的单位元. 再设 X 是 S 上的未定元，$a \in R$. 如果 a 适合 $S[X]$ 中一个首项系数等于 1 的多项式，就说 a 在 S 上整. 如果 R 的每个元素都在 S 上整，就说 R 在 S 上整.

引理 1.9 设 R 在 S 上有限，那么 R 在 S 上整. 设 $R = S[r_1, \cdots, r_n]$ 在 S 上有限生成，而 $r_1, \cdots, r_n$ 都在 S 上整，那么 R 在 S 上有限.

证 先设 R 在 S 上有限，那么有 $r_1, \cdots, r_n \in R$，使得 $R = Sr_1 + \cdots + Sr_n$. 可设 $r_1, \cdots, r_n$ 全不为 0. 因 R 是环，$rr_i \in R$，因此

$$rr_i = s_{i1} r_1 + \cdots + s_{in} r_n, \quad s_{i1}, \cdots, s_{in} \in S.$$

将上面的式子看作 $r_1, \cdots, r_n$ 的齐次线性方程组，它有非零解，因此

$$\det(rI - A) = 0,$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵，而

$$A = (s_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

这就是说，r 适合一个系数属于 S 而首项系数等于 1 的多项式. 因此 r 在 S 上整.

再设 $R=S[r_1,\cdots,r_n]$，而 $r_1,\cdots,r_n$ 都在 S 上整. 因 r_1 在 S 上整，可设 r_1 适合一个系数属于 S 而首项系数等于 1 的 n_1+1 次多项式，那么

$$S[r_1] = S + Sr_1 + \cdots + Sr_1^{n_1}.$$

因 r_2 在 S 上整，所以 r_2 也在 $S[r_1]$上整，可设 r_2 适合一个系数属于 $S[r_1]$而首项系数等于 1 的 n_2+1 次多项式，那么

$$\begin{aligned} S[r_1,r_2] &= S[r_1] + S[r_1]r_2 + \cdots + S[r_1]r_2^{n_2} \\ &= \sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2} S{r_1}^{i_1}{r_2}^{i_2} \end{aligned}$$

如此继续下去即可推出 R 在 S 上有限. □

引理 1.10　$F[V^*]$在$F[V^*]^G$ 上整.

证　设 f 是 $F[V^*]$中任意元素，那么 f 适合

$$P(X) = \prod_{\sigma\in G}(X - \sigma f).$$

显然 $P(X)\in F[V^*]^G[X]$，因此 f 在$F[V^*]^G$ 上整. □

定理 1.6 的第三个证明(Noether，1926)　设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，而 $x_1,\cdots,x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基，那么 $F[V^*]=F[x_1,\cdots,x_n]$. 根据引理 1.10，x_i 适合一个系数属于$F[V^*]^G$ 的首项系数等于 1 的多项式，设为 $f_i(X)(i=1,\cdots,n)$. 设 $f_1(X),\cdots,f_n(X)$的系数集是$\{a_1,\cdots,a_m\}$，那么 $a_1,\cdots,a_m$ 在 F 上生成一个 F-代数 $F[a_1,\cdots,a_m]$，它的元素是 $a_1,\cdots,a_m$ 的系数属于 F 的多项式. 自然也有 $F[x_1,\cdots,x_n]=F[a_1,\cdots,a_n][x_1,\cdots,x_n]$，而 $x_1,\cdots,x_n$ 在

$F[a_1,\cdots,a_m]$上整. 根据引理 1.9 的第二个断言可知,$F[x_1,\cdots,x_n]$在 $F[a_1,\cdots,a_m]$上有限. 但是$F[V^*]=F[x_1,\cdots,x_n]$,所以$F[V^*]$在$F[a_1,\cdots,a_n]$上有限,即$F[V^*]$是有限生成的 $F[a_1,\cdots,a_n]$-模. 根据系理 1.5,$F[a_1,\cdots,a_n]$是 Noether 环,再根据命题 1.8 可知 $F[V^*]$是 Noether $F[a_1,\cdots,a_n]$-模. 因此它的子 $F[a_1,\cdots,a_n]$-模$F[V^*]^G$有限生成,即有 $f_1,\cdots,f_m\in F[V^*]^G$ 使

$$F[V^*]^G = F[a_1,\cdots,a_n]f_1 + \cdots + F[a_1,\cdots,a_n]f_m,$$

但 $F[a_1,\cdots,a_n]$是有限生成的 F-代数,所以$F[V^*]^G$ 也是有限生成的 F-代数. □

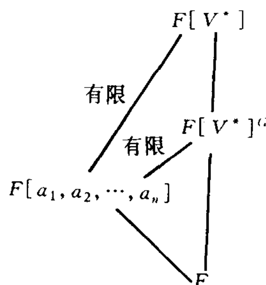


图 1.1

命题 1.11 设 F 是无限域,V 是 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$的有限子群,E 和 K 分别表示$F[V^*]^G$和$F[V^*]$的分式域,并设 $E\subset K$. 对于 $k\in K$和 $\sigma\in G$,设 $k=\dfrac{f}{g}$,其中 $f,g\in F[V^*]$而 $g\neq 0$,定义 $\sigma\cdot k=\dfrac{\sigma\cdot f}{\sigma\cdot g}$,那么 $\sigma\cdot k$ 的定义与 k 的表法 $k=\dfrac{f}{g}$无关,σ 是 K 的自同构,$E=K^G=\{k\in K\mid \sigma\cdot k=k,\forall\ \sigma\in G\}$,而 E 在 F 上的超越次数等于 n.

证 不难验证 $\sigma\cdot k$ 的定义与 k 的表法无关,σ 是 K 的自同构和 K^G 是域. 显然 $K^G\supset E$. 如果 $k\in K^G$,可将 k 表成 $k=f/g$,而 $f,g\in F[V^*]$,那么

$$f/g = (f\prod_{\substack{\sigma\in G\\ \sigma\neq 1}}\sigma\cdot g)/(\prod_{\sigma\in G}\sigma\cdot g)$$

显然上式右方的分母属于$F[V^*]^G$;因为上式左方属于 K^G,所以上式右方的分子也属于$F[V^*]^G$. 这就证明了 $K^G=E$. 对任意 $h\in K$,h 适合 E 上的多项式 $\prod_{\sigma\in G}(X-\sigma\cdot h)$. 因此 K 是 E 的代数扩张,所以

K 在 E 上的超越次数等于 0. 根据命题 1.1, K 在 F 上的超越次数等于 n, 所以 E 在 F 上的超越次数也等于 n. □

从命题 1.11 可以推出生成 F-代数 $F[V^*]^G$ 的不变式个数的一个下界.

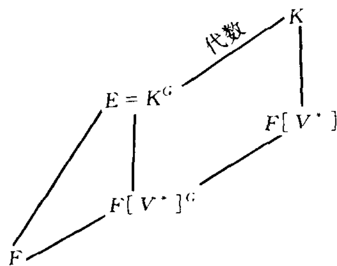


图 1.2

系理 1.12　设 F 是无限域, V 是 F 上的 n 维向量空间, G 是 $GL(V)$ 的有限子群, $f_1, \cdots, f_m \in F[V^*]^G$ 并假定它们生成 F-代数 $F[V^*]^G$. 那么 $f_1, \cdots, f_m$ 中一定有 n 个多项式在 F 上代数无关, 而 $F[V^*]^G$ 中任意 $n+1$ 个多项式都在 F 上代数相关, 特别 $m \geqslant n$.

证　根据假设, $F[f_1, \cdots, f_m] = F[V^*]^G$. 用 E 表 $F[V^*]^G$ 的分式域, 那么自然有 $E = F(f_1, \cdots, f_m)$. 根据命题 1.11, E 在 F 上的超越次数等于 n, 因此 $f_1, \cdots, f_m$ 中一定有 n 个多项式在 F 上代数无关, 而 $F[V^*]^G$ 中任意 $n+1$ 个多项式都在 F 上代数相关, 特别, $m \geqslant n$. □

§1.3　Molien 公式

设 F 是无限域, V 是 F 上的 n 维向量空间. 在 1.1 节中已经指出 $F[V^*]$ 是分次 F-代数, 定义 $F[V^*]$ 的 Poincaré 级数为形式幂级数

$$P(F[V^*], t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim F[V^*]_d t^d,$$

其中 $F[V^*]_d$ 是 $F[V^*]$ 中 d 次齐次多项式函数组成的 F-子空间. 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $x_1, \cdots, x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基, 那么 $F[V^*] = F[x_1, \cdots, x_n]$. 熟知

$$\{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \mid k_1 + \cdots + k_n = d\}$$

是$F[V^*]_d$ 的一组基,因此 dim $F[V^*]_d$ 等于 d 分拆成 n 个非负整数的和的分拆数,于是

$$P(F[V^*],t) = (1-t)^{-n}.$$

熟知,

$$\dim F[V^*]_d = \binom{n+d-1}{d}$$

(习题 1.6).还有更一般的结果.

命题 1.13 设 $g_1,\cdots,g_m$ 是$F[V^*]$中代数无关的齐次多项式函数,并假定 deg $g_i=d_i(i=1,\cdots,m)$. 那么由 $g_1,\cdots,g_m$ 在 F 上生成的多项式代数 $F[g_1,\cdots,g_m]$也是分次 F-代数,而它的 Poincaré 级数

$$P(F[g_1,\cdots,g_m],t) = \prod_{i=1}^{m}(1-t^{d_i})^{-1}.$$

证 第一个断言是显然的,用$F[g_1,\cdots,g_m]_d$ 表$F[g_1,\cdots,g_m]$中 d 次齐次元组成的 F-子空间,那么

$$\{g_1^{k_1}\cdots g_m^{k_m} \mid k_1d_1 + \cdots + k_md_m = d\}$$

是$F[g_1,\cdots,g_m]_d$ 的一组基,即 dim $F[g_1,\cdots,g_m]_d$ 等于 d 分拆成若干个 $d_1,\cdots$,若干个 d_m 的和的分析数,但是把

$$\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})^{-1}$$

展成 t 的形式幂级数后,t^d 的系数恰好也等于这个分拆数. 这就证明了本命题. □

设 V 是 F 上的有限维向量空间,G 是有限群,假定 G 在 V 上有一个作用,即定义了一个映射

$$G\times V\to V,$$
$$(\sigma,\lambda)\mapsto \sigma\cdot\lambda.$$

它满足条件

$$(\sigma\sigma')\cdot\lambda=\sigma\cdot(\sigma'\cdot\lambda)\qquad \text{对任意 } \lambda\in V$$

和

$$1\cdot\lambda=\lambda\qquad \text{对任意 } \lambda\in V.$$

再假定对任意 $\sigma\in G$,

$$\sigma\cdot(\lambda+\mu)=\sigma\cdot\lambda+\sigma\cdot\mu\qquad \text{对任意 } \lambda,\mu\in V,$$

和

$$\sigma\cdot(a\lambda)=a(\sigma\cdot\lambda)\qquad \text{对任意 } a\in F,\lambda\in V$$

都成立,那么就说 V 是 G-模.

从现在起假定 F 的特征等于 0.

引理 1.14　设 V 是 G-模,定义 $V^G=\{\lambda\in V\mid\sigma\cdot\lambda=\lambda,\forall\ \sigma\in G\}$, $z=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma$ 为 V 上的平均算子,那么 $\dim V^G=\mathrm{Tr}\ z$.

证　易证 $z^2=z$,因此 z 的特征值只能是 0 和 1,而 V 有直和分解 $V=V_0\oplus V_1$,其中 $V_i(i=0,1)$是 z 相对于特征值 i 的特征子空间. 那么 $\mathrm{Tr}\ z|_V=\mathrm{Tr}\ z|_{V_0}+\mathrm{Tr}\ z|_{V_1}$,显然 $\mathrm{Tr}\ z|_{V_0}=0$ 而 $\mathrm{Tr}\ z|_{V_1}=\dim V_1$. 因此 $\mathrm{Tr}\ z|_V=\dim V_1$. 显然 $V^G\subseteq V_1$. 反之,设 $\lambda\in V_1$,即 $z\cdot\lambda=\lambda$,那么 $\sigma\cdot\lambda=\sigma\cdot(z\cdot\lambda)=(\sigma z)\cdot\lambda=z\cdot\lambda=\lambda,\forall\ \sigma\in G$,因此 $\lambda\in V^G$. 所以 $V_1=V^G$, $\mathrm{Tr}\ z|_V=\dim V^G$. □

定理1.15(Molien,1897)　设 V 是特征0的域 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$的有限子群,那么$F[V^*]^G$ 的 Poincaré 级数

$$P(F[V^*]^G,t)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-\sigma t)}.\qquad(1\text{-}6)$$

证　用 $\bar{F}$ 表 F 的代数闭包,将 V 的基域 F 扩充到 $\bar{F}$,就得到 $\bar{F}$ 上的一个 n 维向量空间,把它记作 $\bar{V}$. 那么 G 也可以看作是 $GL(\bar{V})$的有限子群,G 也诱导出 $\bar{F}[\bar{V}^*]$上的一个作用:

$$G\times\bar{F}[V^*]\rightarrow\bar{F}[V^*],$$

$$(\sigma, f) \mapsto \sigma \cdot f,$$

而 $\sigma \cdot f$ 由下式所定义

$$(\sigma \cdot f)(\lambda) = f(\sigma^{-1}\lambda), \quad \forall \lambda \in \bar{V}.$$

那么 $\bar{F}[\bar{V}^*]^G$ 就是把$F[V^*]^G$ 的基域扩充到 $\bar{F}$ 而得到的 $\bar{F}$-代数. 因为 σ 是有限阶的,σ 在 $\bar{V}$ 中可以对角化. 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 σ 在 $\bar{V}$ 中的一组特征向量,并设 $\sigma(\varepsilon_i) = \lambda_i(\sigma)\varepsilon_i, i=1, \cdots, n$. 再设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 在 $\bar{V}^*$ 中的对偶基,那么易证 $\sigma \cdot x_i = \lambda_i(\sigma)^{-1} x_i, i=1, \cdots, n$ (习题1.7). 因为

$$x_1^{k_1}, \cdots, x_n^{k_n}, \quad k_1 + \cdots + k_n = d$$

是 $\bar{F}[\bar{V}^*]_d$ 的一组基,而

$$\sigma \cdot (x_1^{k_1}, \cdots, x_n^{k_n}) = \lambda_1(\sigma)^{-k_1} \cdots \lambda_n(\sigma)^{-k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n},$$

所以

$$\mathrm{Tr}\ \sigma|_{\bar{F}[\bar{V}^*]_d} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=d} \lambda_1(\sigma)^{-k_1} \cdots \lambda_n(\sigma)^{-k_n}.$$

设 $\bar{V}$ 上线性变换 σ^{-1}的 n 个特征值是 $\lambda_1(\sigma^{-1}), \cdots, \lambda_n(\sigma^{-1})$,那么

$$\frac{1}{\det(1 - \sigma^{-1}t)} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i(\sigma^{-1})t)^{-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i(\sigma^{-1})t + \lambda_i(\sigma^{-1})^2 t^2 + \cdots),$$

可设 $\lambda_i(\sigma^{-1}) = \lambda_i(\sigma)^{-1}, i=1, \cdots, n$,因此上式右方 t^d 的系数就等于前式右方,所以

$$\frac{1}{\det(1 - \sigma^{-1}t)} = \sum_{d=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\,\sigma|_{\bar{F}[\bar{V}^*]_d} t^d.$$

于是

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} \frac{1}{\det(1 - \sigma t)} = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma^{-1}\in G} \frac{1}{\det(1 - \sigma^{-1}t)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma^{-1}\in G} \sum_{d=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\,\sigma|_{\bar{F}[\bar{V}^*]_d} t^d$$

$$= \sum_{d=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\ z|_{\bar{F}[\bar{V}^*]_d} t^d$$

$$= \sum_{d=0}^{\infty} \dim \bar{F}[\bar{V}^*]_d^G t^d \quad (\text{根据引理 1.14})$$

$$= \sum_{d=0}^{\infty} \dim F[V^*]_d^G t^d$$

$$= P(F[V^*]^G, t).$$

Molien 公式有时有助于断定一组 G 的齐次不变式是否是 $F[V^*]^G$ 的生成元，从下面的例子可以看到.

例1.2　设 $V=\mathbf{R}^2$，$G\subset GL(V)$ 由下面四个元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组成，把它们分别记作1，-1，σ，$-\sigma$. 则

$$\det(1-1t)=(1-t)^2, \quad \det(1-(-1)t)=(1+t)^2,$$

$$\det(1-\sigma t)=\det(1-(-\sigma)t)=(1-t)(1+t).$$

因此

$$P(\mathbf{R}[V^*]^G, t)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t)(1+t)}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-t^2)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^{2k}.$$

可见 $\dim \mathbf{R}[V^*]_2^G=2$，而 $f_1=x_1^2+x_2^2$，$f_2=x_1^2-x_2^2$是 $\mathbf{R}[V^*]_2^G$的一组基. $\dim \mathbf{R}[V^*]_{2k}^G=k+1$，而 $f_1^k, f_1^{k-1}f_2, \cdots, f_1f_2^{k-1}, f_2^k$是 $\mathbf{R}[V^*]_{2k}^G$ 的一组基(习题1.8)，因此 $\mathbf{R}[V^*]^G=\mathbf{R}[f_1, f_2]$.

例1.1(续1)　令

$$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

那么

$$G=\{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\},$$

则

$$\det(1-t)=(1-t)^2, \det(1-\sigma t)=\det(1-\sigma^3 t)=1+t^2,$$

$$\det(1-\sigma^2 t)=(1+t)^2,$$

$$P(\mathbf{R}[V^*]^G,t)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{1+t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right]$$

$$=\frac{1+t^4}{(1-t^2)(1-t^4)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(t^{4k}+t^{4k+2}).$$

在例1.1中已经指出 $f_1=x_1^2+x_2^2, f_2=x_1^2x_2^2, f_3=x_1^3x_2-x_1x_2^3$都是 G 的齐次不变式. 因此对任意 $p,q\in\mathbf{R}[X_1,X_2]$, $p(f_1,f_2)+f_3q(f_1,f_2)$都是 G 的不变式. 更进一步利用 $\mathbf{R}[V^*]^G$ 的 Poincaré 多项式的展开式,可以证明 G 的任一不变式都可以唯一地表成这种形状(习题1.9). 再验证 $f_1^2f_2-4f_2^2-f_3^2=0$($\mathbf{R}[V^*]^G$ 的生成元 f_1,f_2,f_3的这种关系叫做一个合冲).

§1.4 有限伪反射群的不变式

1.4.1 有限伪反射群

设 V 是域 F 上的 n 维向量空间,再设 $\sigma\in GL(V)$. 令

$$H=\{\xi\in V\,|\,\sigma\xi=\xi\}.$$

如果 $\dim H=n-1$,那么 σ 就叫做伪反射,而 H 叫做伪反射 σ 的反射超平面. 显然 $H=\ker(\sigma-1)$,这里1表示 V 的单位变换. 因此 $\dim \operatorname{Im}(\sigma-1)=1$. $\operatorname{Im}(\sigma-1)$中的任一非零向量都叫做伪反射 σ 的反射向量. 如果 σ 可以对角化,那么有向量 $\lambda\in V\backslash H$ 有性质 $\sigma\lambda=\zeta\lambda$;因 $\sigma\neq1$,所以 $\zeta\neq1$. 这时 λ 就是 σ 的反射向量,而 σ 的反射向量都是 λ 的非零倍数. 下面的引理给出 σ 可对角化的条件.

引理1.16 设 $\sigma\in GL(V)$是伪反射,而 $\lambda\in V\backslash H$,不妨假设 $\sigma\lambda=\zeta\lambda+\mu$, $\zeta\in F$, $\zeta\neq0$,而 $\mu\in H$,那么 σ 可以对角化当且仅当 $\zeta\neq1$,也当且仅当 $\sigma-1$不是幂零线性变换. 特别,如果假设 σ 是有限

阶的而 F 的特征不能整除 σ 的阶 m，那么 σ 一定可以对角化；如果 $\lambda\in V\backslash H$，$\sigma\lambda=\zeta\lambda$，那么 $\xi^m=1$.

证　设 $\zeta\neq 1$. 令 $\lambda'=\lambda+(\zeta-1)^{-1}\mu$，那么 $\lambda'\in V\backslash H$ 而 $\sigma\lambda'=\zeta\lambda'$. 选 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是 H 的一组基而 $\varepsilon_n=\lambda'$，那么 σ 对于这组基的矩阵就是对角矩阵. 反之，设 $\zeta=1$，那么 $\sigma\lambda=\lambda+\mu$. 因为 $\dim H=n-1$，所以 $\mu\neq 0$. 那么 σ 的极小多项式是 $(t-1)^2$，因此 σ 不能对角化. 显然 $\zeta\neq 1$ 当且仅当 $\sigma-1$ 不是幂零线性变换.

现在来证最后一个断言. 设 σ 的阶等于 m. 如果 $\zeta=1$，那么 $\sigma^m\lambda=\lambda+m\mu$，于是 $m\mu=0$. 因为 F 的特征不能整除 m，所以 $\mu=0$，于是 $\sigma\lambda=\lambda$，因此 $\sigma=1$，V 是单位变换. 这与 σ 是伪反射的假设矛盾，所以一定有 $\zeta\neq 1$. 根据本引理的第一个断言，σ 可对角化. 最后一个断言的最后一句话是显然的.　□

设 F 的特征 $\neq 2$，$GL(V)$ 中阶为2的伪反射叫*反射*.

设 $G\subset GL(V)$，如果 G 是由伪反射生成的有限群，G 就叫*有限伪反射群*. 如果 G 是由反射生成的有限群，G 就叫*有限反射群*. 当 $F=\mathbf{R}$ 时，有限价伪反射都是反射，这时有限反射群又叫*有限实反射群*. 当 $F=\mathbf{C}$ 时，有限伪反射群又叫*有限复反射群*.

例1.3　n 个文字 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称群 S_n 由对换 $(x_i\ x_j)(i\neq j)$ 生成. 如果把 $x_1,\cdots,x_n$ 看作是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中标准基 $(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$ 的对偶基，那么对换 $(x_i\ x_j)$ 可以看作 $\mathbf{R}^n$ 中以超平面 $x_i-x_j=0$ 为反射超平面的反射，因此 S_n 是有限实反射群.

$x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式是 S_n-不变式，对称函数的基本定理是说，任一对称多项式都可以表成 n 个初等对称多项式 $s_1=x_1+\cdots+x_n$，$s_2=x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n$，$\cdots$，$s_n=x_1x_2\cdots x_n$ 的多项式，而且表法唯一.　□

这一节的主要内容是证明下面这个对称函数基本定理的推广.

定理1.17 设 F 是特征0的域,V 是 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$的有限子群. 那么下列诸陈述等价:

(a) G 是有限伪反射群;

(b) $F[V^*]^G$ 是由 n 个代数无关的 G 的齐次不变式在 F 上生成的多项式代数;

(c) $F[V^*]^G$ 中有 n 个代数无关的 G 的齐次不变式 f_1, $f_2,\cdots,f_n$具有性质 $|G|=\deg f_1\cdot\deg f_2\cdots\deg f_n$;

(d) $F[V^*]$是有限秩的自由$F[V^*]^G$-模.

(a)⇒(b)是 Coxeter 1951 对不可约有限实反射群而 Shephard-Todd1954对不可约有限复反射群一个个地验证的. Chevalley 1955a 对一般的有限实反射群给出了(a)⇒(b)的统一证明,所以把它叫做 Chevalley 定理. Chevalley 证明的途径是先证(a)⇒(d),再证(d)⇒(b). Steinberg 1964和 Serre 1968都指出 Chevalley 的证明对有限复反射群也适用. (b)⇒(a)是 Shephard-Todd 1954证明的,叫做 Shephard-Todd 定理. 他们在证明(b)⇒(a)的过程中证明了(b)⇒(c). (c)⇒(b)是 Springer 1974证明的.

1.4.2 Chevalley 定理

首先来证明,从定理1.17中的(a)可以推出(d)来.

仍用 I 表示$F[V^*]^G_+$在$F[V^*]$中生成的理想. 对于 $d=1$, $2,\cdots$,令 $I_d=I\cap F[V^*]_d$,那么 I 有向量空间直和分解

$$I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_d \oplus \cdots$$

(习题1.12),这就是说 I 是齐次理想. 可以把同余类环$F[V^*]/I$看作 F 上的分次向量空间,而

$$(F[V^*]/I)_d = (F[V^*]_d + I)/I$$

(习题1.12). 因此可以假设$F[V^*]/I$ 有一组基$\{g_\alpha+I\mid\alpha\in\Omega\}$,其中 g_α 都是齐次多项式,自然可以把$F[V^*]$看作$F[V^*]^G$-模. 先来

证明，把$F[V^*]$看作$F[V^*]^G$-模，则$\{g_\alpha \mid \alpha\in\Omega\}$张成$F[V^*]$，即$F[V^*]=\sum_\alpha F[V^*]^G g_\alpha$.

令$T=\sum_\alpha F[V^*]^G g_\alpha$，因为$F[V^*]^G$是分次代数而$g_\alpha$是齐次多项式，所以$T$是分次模，即$T$可以写成子空间$T_d=T\cap F[V^*]_d$ $(d=0,1,2,\cdots)$的直和

$$T=T_0\oplus T_1\oplus T_2\oplus\cdots,$$

而

$$F[V^*]_d^G T_e\subset T_{d+e},\quad \forall\ d,e\geqslant 0.$$

现在来证明$T_d=F[V^*]_d$，由此即推出$T=F[V^*]$. 对d作归纳法. 当$d=0$时，因为$F[V^*]_0\cap I=(0)$，而$\{g_\alpha+I\mid\alpha\in\Omega\}$是$F[V^*]/I$的一组基，所以必有一个$g_\alpha\in F$，因此$T_0=F[V^*]_0$. 再设$d>0$，并假设$T_{d'}=F[V^*]_{d'}$，对任一$d'<d$. 设$f\in F[V^*]_d$，可以把$f$表成

$$f=\sum_\alpha c_\alpha g_\alpha+\sum_\beta h_\beta f_\beta,$$

这里$c_\alpha\in F$，f_β是正次数齐次G-不变式，h_β是$F[V^*]$中的齐次多项式. 上式右方$c_\alpha g_\alpha$和$h_\beta f_\beta$这些项里次数$\neq d$的项必然彼此相消. 因此可设上式右方中出现的$c_\alpha g_\alpha$和$h_\beta f_\beta$这些项的次数都等于d. 于是$\deg h_\beta<d$. 设$\deg h_\beta=d'$，则$h_\beta\in F[V^*]_{d'}$而$d'<d$. 根据归纳法假设，$h_\beta\in T_{d'}$，而$T_{d'}\subset T$. 所以$f\in T$，当然$f\in T_d$.

还需要证明：$\{g_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$在$F[V^*]^G$上自由，这需要 Chevalley 的一条引理.

引理 1.18　设$f_1,f_2,\cdots,f_r\in F[V^*]^G$，而$f_1\notin F[V^*]^G f_2+\cdots+F[V^*]^G f_r$，即$f_2,\cdots,f_r$在$F[V^*]^G$中生成的理想. 假定$g_1,g_2,\cdots,g_r$是$F[V^*]$中的齐次元并适合

$$f_1g_1+f_2g_2+\cdots+f_rg_r=0,\tag{1-7}$$

那么$g_1\in I$.

证　首先指出$f_1\notin F[V^*]f_2+\cdots+F[V^*]f_r$，即$f_2,\cdots,f_r$在$F[V^*]$中生成的理想，否则有

$$f_1 = h_2 f_2 + \cdots + h_r f_r, \quad h_2, \cdots, h_r \in F[V^*].$$

将平均算子施行到上式双方就得到

$$f_1 = \tilde{f}_1 = \tilde{h}_2 f_2 + \cdots + \tilde{h}_r f_r.$$

因$\tilde{h}_i \in F[V^*]^G (i=2,\cdots,r)$，所以 f_1属于 $f_2,\cdots,f_r$ 在$F[V^*]^G$ 中生成的理想，这与本引理的假设相矛盾.

对 $\deg g_1$作归纳来证明 $g_1 \in I$. 设 $\deg g_1 = 0$，必有 $g_1 = 0$，否则从(1-7)式会推出 f_1属于 $f_2,\cdots,f_r$ 在$F[V^*]$中生成的理想.

现在设 $\deg g_1 > 0$. 在 G 中任选一个伪反射 σ_H，它的反射超平面 H 是 V 的 $n-1$维子空间，任选 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，再设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基. 可设 H 由线性方程 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$所定义，即 $H=\{\lambda\in V \mid (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(\lambda)=0\}$. 因为 $\sigma_H(\lambda)=\lambda$ 对任一 $\lambda\in H$，所以对任一 $i=1,\cdots,r$，$(\sigma_H^{-1}g_i-g_i)(\lambda)=0$ 对任一 $\lambda\in H$. 显然 $a_1,\cdots,a_n$ 不能全是0，设 $a_n\neq 0$，在多项式代数 $F[x_1,\cdots,x_n]$中用 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ 去除 $\sigma_H^{-1}g_i-g_i (i=1,\cdots,r)$，得到

$$\sigma_H^{-1}g_i - g_i = q_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + r_i, \qquad (1\text{-}8)$$

其中 $q_i\in F[x_1,\cdots,x_n]$，而 $r_i\in F[x_1,\cdots,x_{n-1}]$. 如果 $r_i\neq 0$，可以在无限域 F 中找到一组元 $c_1,\cdots,c_{n-1}$使 $r_i(c_1\varepsilon_1+\cdots+c_{n-1}\varepsilon_{n-1})\neq 0$. 把 $c_1,\cdots,c_{n-1}$代入 $a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}+a_nx_n=0$中去，解得一个 c_n 使 $a_1c_1+\cdots+a_{n-1}c_{n-1}+a_nc_n=0$. 那么 $\lambda=c_1\varepsilon_1+\cdots+c_{n-1}\varepsilon_{n-1}+c_n\varepsilon_n\in H$，于是$(\sigma_H^{-1}\cdot g_i-g_i)(\lambda)=0$和$(a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}+a_nx_n)(\lambda)=0$. 由(1-8)式得 $r_i(\lambda)=0$，即 $r_i(c_1\varepsilon_1+\cdots+c_{n-1}\varepsilon_{n-1})=0$，这是一个矛盾，因此有

$$\sigma_H^{-1}\cdot g_i - g_i = q_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n), \quad i = 1,\cdots,r. \quad (1\text{-}9)$$

因为 $f_i\in F[V^*]^G$，所以 $\sigma_H^{-1}f_i=f_i$，将 σ_H^{-1} 作用到(1-7)式上，将所得结果再减去(1-7)式，就得到

$$f_1(\sigma_H^{-1}\cdot g_i - g_i) + \cdots + f_r(\sigma_H^{-1}\cdot g_r - g_r) = 0. \quad (1\text{-}10)$$

把(1-9)式代入上式，再消去 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n$，就得到

$$f_1q_1 + \cdots + f_rq_r = 0.$$

显然 $\deg q_1 < \deg g_1$. 根据归纳法假设,$q_1 \in I$. 再由(1-9)式推出 $\sigma_H^{-1} \cdot g_1 - g_1 \in I$. 因为 G 由 G 中伪反射生成,所以 $\sigma \cdot g_1 - g_1 \in I$, $\forall\ \sigma \in G$. 于是 $\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot g_1 - g_1 \in I$. 但 $\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot g_1 \in F[V^*]_+^G \subset I$,所以 $g_1 \in I$. □

接着来证明(a)⇒(d). 对 m 作归纳法来证明:如果 $g_1, \cdots, g_m$ 都是 $F[V^*]$ 的齐次式,而 $g_1 + I, \cdots, g_m + I (\in F[V^*]/I)$ 在 F 上线性无关,那么 $g_1, \cdots, g_m$ 在 $F[V^*]^G$ 上自由. 当 $m=1$ 时,这是显然的. 设 $m>1$,假设有一个 $F[V^*]^G$-线性关系

$$f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m = 0. \tag{1-11}$$

可以假定 $f_1, \cdots, f_m$ 都是 $F[V^*]^G$ 中齐次式,而 $\deg(f_1 g_1) = \cdots = \deg(f_m g_m)$. 因 $g_1 \notin I$,从引理1.18推出

$$f_1 = h_2 f_2 + \cdots + h_m f_m, \quad h_i \in F[V^*]^G. \tag{1-12}$$

可以假设 h_i 都是 $F[V^*]^G$ 中齐次式,而不等于0的 $h_i f_i$ 的次数都等于 $\deg f_1$. 把(1-12)式代入(1-11)式,再整理一下,就得到

$$f_2(g_2 + h_2 g_1) + \cdots + f_m(g_m + h_m g_1) = 0. \tag{1-13}$$

假设有 F-线性关系

$$c_2(g_2 + h_2 g_1 + I) + \cdots + c_m(g_m + h_m g_1 + I) = I.$$

因为 h_i 都是 $F[V^*]^G$ 中的齐次式,所以或者 $h_i \in F$ 或者 $h_i \in F[V^*]_+^G \subset I$,因此有 F-线性关系

$$c_1(g_1 + I) + c_2(g_2 + I) + \cdots + c_m(g_m + I) = 0,$$

其中 c_1 是 $c_2 h_2 + \cdots + c_m h_m$ 的常数项. 假设了 $g_1 + I, \cdots, g_m + I$ 在 F 上线性无关,所以 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. 因此 $g_2 + h_2 g_1 + I, \cdots, g_m + h_m g_1 + I$ 在 F 上线性无关. 根据归纳法假设 $g_2 + h_2 g_1, \cdots, g_m + h_m g_1$ 在 $F[V^*]^G$ 上自由,因此(1-13)式中的 $f_2 = \cdots = f_m = 0$,所以也有 $f_1 = 0$.

最后还要证明 $F[V^*]$ 作为自由 $F[V^*]^G$-模的秩有限,实际上还可以证明这个秩等于 $|G|$,这需要下面这个引理.

引理1.19 设 R 是有单位元的整环，S 是 R 的子环，而 S 含 R 的单位元，用 K 和 E 分别表示 R 和 S 的分式域，并设 $K \supset E$. 假设 R 作为 S-模是自由模，那么 $[K:E]$ 等于自由 S-模 R 的秩.

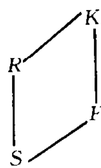


图1.3

证 设 $\{a_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ 是 R 作为 S-模的一组自由生成元，即 $R = \sum_{\alpha \in \Omega} S a_\alpha$，而如果 $s_1 a_{\alpha_1} + \cdots + s_r a_{\alpha_r} = 0$，$\alpha_i \in \Omega$，$s_i \in R (i=1,\cdots,r)$，则 $s_1 = \cdots = s_r = 0$. 先来证明 $\{a_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ 在 E 上线性无关. 设有线性关系 $t_1 a_{\alpha_1} + \cdots + t_r a_{\alpha_r} = 0$，$\alpha_i \in \Omega$，$t_i \in E (i=1,\cdots,r)$. 将 t_i 写成 $t_i = \frac{b_i}{c} (i=1,\cdots,r)$，而 $b_i, c \in S$. 那么就有 $b_1 a_{\alpha_1} + \cdots + b_r a_{\alpha_r} = 0$. 因此 $b_1 = b_2 = \cdots = b_r = 0$，于是 $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$，因此 $\{a_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ 在 E 上线性无关. 特别，如果 R 作为自由 S-模的秩等于 ∞，那么也有 $[K:E] = \infty$.

现在设 R 作为自由 S-模的秩为 r，而 $r < \infty$. 设 $a_1, \cdots, a_r$ 是自由 S-模 R 的一组自由生成元，根据上面一段的证明，$[K:E] \geq r$. 如果 $[K:E] > r$，那么 K 中有一元素 d_{r+1}，而 $a_1, \cdots, a_r, d_{r+1}$ 在 E 上线性无关. 将 d_{r+1} 写成 $d_{r+1} = \frac{a_{r+1}}{d}$，而 $a_{r+1}, d \in R$. 那么 $da_1, \cdots, da_r, a_{r+1} \in R$，它们在 E 上线性无关，因而在 S 上自由，这与自由 S-模 R 的秩等于 r 相矛盾，因此 $[K:E] = r$.

再回来接着证明 (a)⇒(d)，用 K 和 E 分别表示 $F[V^*]$ 和 $F[V^*]^G$ 的分式域. 根据命题1.11，E 是 K 的 G-不变子域. 根据 Galois 理论，$[K:E] = |G|$. 再根据引理1.19，$F[V^*]$ 是秩为 $|G|$ 的自由 $F[V^*]^G$-模.

注记 在 (a)⇒(d) 的证明中只要假设 F 是无限域和它的特征与 $|G|$ 互素，这在引理1.18的证明中用到. G 是有限伪反射群的假设也只是在引理1.18的证明中用到.

系理1.20　设 V 是无限域 F 上的有限维向量空间，G 是作用在 V 上的有限伪反射群，并假定 F 的特征与 $|G|$ 互素，那么 $F[V^*]/I$ 是 F 上的 $|G|$ 维向量空间.

证　根据定理1.17(a)⇒(d)的证明，F 上向量空间 $F[V^*]/I$ 的维数就等于自由 $F[V^*]^G$-模 $F[V^*]$ 的秩，而后者又等于 G 的阶 $|G|$. □

在这里顺便插进下面这个命题.

命题1.21(Chevalley 1955)　设 V 是无限域 F 上的 n 维向量空间，G 是作用在 V 上的有限伪反射群，I 是 $F[V^*]^G_+$ 在 $F[V^*]$ 中生成的理想，再设 F 的特征与 $|G|$ 互素. 那么对任意 $\sigma\in G$ 和 $f+I\in F[V^*]/I$，定义 $\sigma\cdot(f+I)=\sigma\cdot f+I$，就得到 G 的一个表示，而这个表示和 G 的正则表示等价.

证　设 $\sigma\in G, g\in I$，那么显然有 $\sigma\cdot g\in I$. 因此定义 $\sigma\cdot(f+I)=\sigma\cdot f+I, \forall\ \sigma\in G, f+I\in F[V^*]/I$，是合理的. 把这样得到的表示记作 T，那么 T 的表示空间 $F[V^*]/I$ 是 F 上的 $|G|$ 维向量空间. 还要证明 T 和 G 的正则表示等价.

设 $|G|=m$，根据(a)⇒(d)的证明，自由 $F[V^*]^G$-模 $F[V^*]$ 的秩也等于 m. 设 $g_1+I,\cdots,g_m+I$ 是 F 上向量空间 $F[V^*]/I$ 的一组基，不妨假设 $g_1,\cdots,g_m$ 都是 $F[V^*]$ 中的齐次多项式. 根据(a)⇒(d)的证明，$g_1,\cdots,g_m$ 就是自由 $F[V^*]^G$-模 $F[V^*]$ 的一组自由基. 设 σ 是 G 中任意元素，那么

$$\sigma\cdot g_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}(\sigma)g_i,\quad j=1,\cdots,m. \tag{1-14}$$

可以假定 $a_{ij}(\sigma)$ 都是 $F[V^*]^G$ 中的齐次式，而 $\deg a_{ij}(\sigma)=\deg g_j-\deg g_i$，特别 $a_{ii}(\alpha)\in F, i=1,\cdots,m$. 用 K 和 E 分别表示 $F[V^*]$ 和 $F[V^*]^G$ 的分式域，那么 $g_1,\cdots,g_m$ 也是 K 在 E 上的一组基. 因此

$$\sigma\mapsto(a_{ij}(\sigma)) \tag{1-15}$$

就是把 K 看作 E 上的向量空间时，G 在向量空间 K 上的表示，把

它记作 T_1. 从(1-14)式推出

$$\sigma \cdot (g_j + I) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}(\sigma) + I)(g_i + I).$$

显然,

$$\sigma \mapsto (a_{ij}(\sigma) + I)$$

就是 G 在 F 上向量空间 $F[V^*]/I$ 上的表示 T. T 和 T_1 这两个表示有相同的特征标,因此等价.

另一方面,K 是 E 的 Galois 扩张,而 K 在 E 上的 Galois 群就是 G. 设 $G=\{\sigma_1=1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m\}$. 根据正规基定理,有 $f\in K$ 使得 $\sigma_1 \cdot f_1, \sigma_2 \cdot f_1, \cdots, \sigma_m \cdot f$ 是 K 在 E 上的一组基. 设 σ 是 G 中任意元素,那么

$$\sigma \cdot (\sigma_j f) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}(\sigma)(\sigma_i \cdot f), \quad j = 1,\cdots,m,$$

其中 $b_{ij}(\sigma)\in E$ 因此

$$\sigma \mapsto (b_{ij}(\sigma)) \tag{1-16}$$

也是 G 在向量空间 K 上的表示 T_1,而(1-15)式和(1-16)式只是 T_1 相对于不同的两组基的矩阵表示. 显然,(1-16)式是 G 的正则表示,因此,G 的表示 T 等价于 G 的正则表示. □

(d)⇒(b)的证明　假设 $F[V^*]$ 是有限秩的自由 $F[V^*]^G$-模.

根据有限生成定理(即定理1.6),$F[V^*]^G$ 是有限生成的 F-代数,那么根据系理1.5,$F[V^*]^G$ 是 Noether 环. 像定理1.6的第一个证明中一样,令

$$F[V^*]^G_+ = F[V^*]^G_1 \oplus F[V^*]^G_2 \oplus \cdots,$$

显然 $F[V^*]^G_+$ 是 $F[V^*]^G$ 的理想. 因此 $F[V^*]^G_+$ 是 $F[V^*]^G$ 的有限生成的理想. 可以在 $F[V^*]^G_+$ 中选一组极小齐次生成元 $f_1,\cdots,f_m$,这就是说 $f_1,\cdots,f_m$ 都是 $F[V^*]^G_+$ 中的齐次式,$f_1,\cdots,f_m$ 是 $F[V^*]^G$ 中理想 $F[V^*]^G_+$ 的一组生成元,但对任意 $i=1,\cdots,m$, $f_1,\cdots,\hat{f}_i,\cdots,f_m$ 却不是,这里 $\hat{f}_i$ 表示把 f_i 从 $f_1,\cdots,f_m$ 中取消. 当然有

$\deg f_i>0, i=1,\cdots,m$. 用 $F[f_1,\cdots,f_m]$表 F^V 中所有形如

$$\sum_{i_1,\cdots,i_m} c_{i_1\cdots i_m} f_1^{i_1}\cdots f_m^{i_m},\quad c_{i_1\cdots i_m}\in F$$

的有限和式组成的 F-代数,显然 $F[f_1,\cdots,f_m]\subset F[V^*]^G$. 再证明 $F[V^*]^G\subset F[f_1,\cdots,f_m]$. 这只要证明$F[V^*]_d^G\subset F[f_1,\cdots,f_m]$即可. 当 $d=0$时,这显然是对的. 再设 $d>0$,而 $f\in F[V^*]_d^G$,那么 $f\in F[V^*]_+^G$. 于是可以把 f 表示成

$$f=b_1f_1+\cdots+b_mf_m,$$

其中 $b_i\in F[V^*]^G, i=1,\cdots,m$. 显然可设 $b_1,\cdots,b_m$ 都是$F[V^*]^G$ 中齐次式,于是 $\deg b_i<\deg f=d$. 根据归纳法假设,$b_i\in F[f_1,\cdots,f_m], i=1,\cdots,m$,因此 $f\in F[f_1,\cdots,f_m]$.

还需要证明 $f_1,\cdots,f_m$ 在 F 上代数无关. 用反证法来证,假定 $f_1,\cdots,f_m$ 在 F 上代数相关,即 $F[X_1,\cdots,X_m]$中有一个多项式 $h(X_1,\cdots,X_m)\neq 0$,但是

$$h(f_1,\cdots,f_m)=0. \tag{1-17}$$

设 $aX_1^{e_1}\cdots X_m^{e_m}$是出现在 h 中的一个单项式,$a\in F$ 而 $a\neq 0$. 令 $d_i=\deg f_i$,那么 $\deg(af_1^{e_1}\cdots f_m^{e_m})=\sum_{i=1}^m d_ie_i$. 令 $d=\sum_{i=1}^m d_ie_i$,并令 h_d 表示 h 中那些单项式的和,经代入 $f_1,\cdots,f_m$ 之后,它们的次数都等于 d. 显然 $h_d(X_1,\cdots,X_m)\neq 0$而 $h_d(f_1,\cdots,f_m)=0$,因此可以假设 $h=h_d$.

设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基,$x_1,\cdots,x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基,那么$F[V^*]=F[x_1,\cdots,x_n]$. 对每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,把(1-17)式对 x_k 求偏导,得到

$$\sum_{i=1}^m h_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}=0, \tag{1-18}$$

其中

$$h_i=\frac{\partial h}{\partial X_i}(f_1,\cdots,f_m).$$

显然 h_i 是$F[V^*]^G$ 中次数 $d-d_i$ 的齐次多项式,而$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$都是$F[V^*]$中的齐次式.重排一下 $h_1,\cdots,h_m$ 使得 $h_1,\cdots,h_r$ 是 $h_1,\cdots,h_m$ 在$F[V^*]^G$ 中生成的理想的一组极小生成元,那么$1\leqslant r\leqslant m$.把 $h_{r+1},\cdots,h_m$ 表成 $h_1,\cdots,h_r$ 的$F[V^*]^G$-线性组合

$$h_j=\sum_{i=1}^{r}v_{ij}h_i,\quad v_{ij}\in F[V^*]^G,j=r+1,\cdots,m.\qquad(1\text{-}19)$$

h_i 作为 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式是 $d-d_i$ 次齐次式,因此略去(1-19)式右方互相消去的项之后,可以假定 v_{ij}是 d_i-d_j 次齐次式.将(1-19)式代入(1-18)式,得到

$$\sum_{i=1}^{r}h_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{j=r+1}^{m}v_{ij}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)=0,\quad k=1,\cdots,n.\qquad(1\text{-}20)$$

令

$$u_{ik}=\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{j=r+1}^{m}v_{ij}\frac{\partial f_j}{\partial x_k},\quad i=1,\cdots,r;k=1,\cdots,n.\ (1\text{-}21)$$

显然 u_{ik}是 $x_i,\cdots,x_n$ 的 d_i-1次齐次式.根据假设,设 $g_1,\cdots,g_s$ 是$F[V^*]^G$-模$F[V^*]$的一组自由生成元,那么可以把 u_{ik}表成

$$u_{ik}=\sum_{l=1}^{s}u_{ikl}g_l,\quad u_{ikl}\in F[V^*]^G.\qquad(1\text{-}22)$$

把(1-22)式代入(1-20)式之后,利用 $g_1,\cdots,g_l$ 在$F[V^*]^G$ 上自由就推出

$$\sum_{i=1}^{r}h_iu_{ikl}=0.$$

根据对 $h_1,\cdots,h_r$ 所作的假设,由引理1.18推出 $u_{ikl}\in F[V^*]_+^G$(习题1-13),再从(1-22)式推出 $u_{ik}\in I$,这里仍用 I 表示$F[V^*]_+^G$ 在$F[V^*]$中生成的理想.自然 $f_1,\cdots,f_m$ 也是 I 的一组基.因此可将 u_{ik}表成 $f_1,\cdots,f_m$ 的$F[V^*]$-线性组合

$$u_{ik}=\sum_{j=1}^{m}v_{ikj}f_j,\quad v_{ikl}\in F[V^*].\qquad(1\text{-}23)$$

从(1-21)式和(1-23)式得到

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{j=r+1}^{m}v_{ij}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{m}v_{ikj}f_j. \qquad (1\text{-}24)$$

把(1-24)式双方乘以 x_k，然后对 k 求和，再利用 Euler 关于齐次多项式的公式(习题1-14)，就推出

$$d_if_i+\sum_{j=r+1}^{m}v_{ij}d_jf_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}v_{ikj}x_kf_j.$$

那么上式双方的 d_i 次分量相等，于是 f_i 就表成其余的 $f_j(j\neq i)$ 的 $F[V^*]$-线性组合，设

$$f_i=\sum_{j\neq i}a_jf_j,\quad a_i\in F[V^*].$$

作用平均算子 z，就得出

$$f_i=\sum_{j\neq i}\tilde{a}_jf_j.$$

这与 $f_1,\cdots,f_m$ 的选取相矛盾.

最后再证明 $m=n$. 已经证明了 $F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_m]$，而 $f_1,\cdots,f_m$ 在 F 上代数无关. 因此 $F[V^*]^G$ 的分式域 E 在 F 上的超越次数等于 m. 设 K 是 $F[V^*]$ 的分式域，根据命题1.11，$K^G=E$，因此 K 在 E 上代数，那么 E 在 F 上的超越次数就等于 K 在 F 上的超越次数，而后者显然等于 n，所以 $m=n$.

这样(d)⇒(b)就证明了.

在(d)⇒(b)的证明中的最后一步证明了

系理1.22　设 G 是作用在无限域 F 上的 n 维向量空间 V 上的有限伪反射群，$f_1,\cdots,f_m$ 是 G 的 m 个在 F 上代数无关的齐次不变式，$F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_m]$. 那么 $m=n$. □

基于系理1.22，我们定义：设 G 是作用在无限域 F 上的 n 维向量空间 V 上的有限伪反射群，G 的 n 个在 F 上代数无关的齐次不变式如果在 F 上生成 $F[V^*]^G$，就叫 G 的一组基本不变式.

1.4.3　Shepherd-Todd 定理

为了证明 Shepherd-Todd 定理，先对于适合条件(b)的有限线

性变换群来定义它的一组基本不变式. 在证明了 Shepherd-Todd 定理(即(b)⇒(a))之后,就可以知道这实际上就是有限伪反射群的一组基本不变式.

设 V 是域 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$的有限子群. 若说 G 有一组基本不变式,就是说有 n 个代数无关的 G 不变齐式 $f_1,\cdots,f_n$,它们在 F 上生成$F[V^*]^G$,即$F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_n]$. 这时,$f_1,\cdots,f_n$ 也叫做 G 的一组基本不变式.

在证明(b)⇒(c)之前,先证明有一组基本不变式的线性变换群的几个性质.

命题1.23 设 V 是域 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$的有限子群,再设 $f_1,\cdots,f_n$ 和 $g_1,\cdots,g_n$ 是 G 的两组基本不变式,那么把 $g_1,\cdots,g_n$ 重新排列一下之后,一定有 $\deg f_i=\deg g_i,i=1,\cdots,n$.

证 设 $\deg f_i=d_i,\deg g_i=e_i,i=1,\cdots,n$. 根据命题的假设,有 F 上$2n$ 个 n 个未定元 $X_1,\cdots,X_n$ 的多项式 $F_i(X_1,\cdots,X_n)$和 $G(X_1,\cdots,X_n),i=1,\cdots,n$,使得

$$f_i = F_i(g_1,\cdots,g_n) \quad i = 1,\cdots,n$$

和

$$g_i = G_i(f_1,\cdots,f_n) \quad i = 1,\cdots,n.$$

根据求偏导函数的链规则,

$$\delta_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial f_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial g_j}\frac{\partial G_j}{\partial f_k}, \quad 1 \leqslant i,k \leqslant n.$$

这就是说,矩阵

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial g_j}\right) \text{和} \left(\frac{\partial G_j}{\partial f_k}\right)$$

互为逆矩阵. 因此

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial g_j}\right) \neq 0.$$

那么这个行列式的展开式中至少有一项不等于0. 把 $g_1,\cdots,g_n$ 重新排列一下,可以假设下面这一项

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial g_i}\neq 0.$$

因此 X_i 一定在 F_i 中出现,$i=1,\cdots,n$. 于是 $d_i\geqslant e_i$, $\sum_{i=1}^{n}d_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}e_i$.
同理,从

$$\det\left(\frac{\partial G_j}{\partial f_k}\right)\neq 0$$

又可推出 $e_i\geqslant d_{\pi(i)}$,$i=1,\cdots,n$,这里 π 是1,2,…,n的一个排列. 那么 $\sum_{i=1}^{n}e_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}d_{\pi(i)}=\sum_{i=1}^{n}d_i$,因此 $\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{i=1}^{n}e_i$,所以 $d_i=e_i$,$i=1,\cdots,n$. □

设 V 是域 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$ 的有限子群,并假定 G 有一组基本不变式 $f_1,\cdots,f_n$,令 $d_i=\deg f_i$,$i=1,\cdots,n$. 根据命题1.23,$d_1,\cdots,d_n$ 不依赖于基本不变式组 $f_1,\cdots,f_n$ 的选择,那么 $d_1,\cdots,d_n$ 叫做 G 的次数.

引理1.24 设 V 是特征0的域 F 上的 n 维向量空间,G 是 $GL(V)$ 的有限子群,H 是 V 的 $n-1$ 维子空间,令

$$G_H=\{\sigma\in G\,|\,\sigma\lambda=\lambda,\forall\ \lambda\in H\}.$$

如果 G 中没有伪反射以 H 为反射超平面,那么 $G_H=\{1\}$. 如果 G 中有伪反射以 H 为反射超平面,假设 G 中一共有 $r-1$ 个伪反射以 H 为反射超平面,那么 G_H 是 r 阶循环群而且有一个向量 $\lambda\in V\backslash H$ 使得对任意 $\sigma\in G_H$ 都有 $\sigma\lambda=\zeta_\sigma\lambda$,其中 ζ_σ 是 F 中的 r 次单位根,而 $\zeta_\sigma(\sigma\in G_H)$ 之中一定有本原 r 次单位根.

证 第一个断言是显然的,现在来证第二个断言. 设 G 中伪反射 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{r-1}$ 以 H 为反射超平面,那么 $G_H=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_{r-1},\sigma_r=$

1}. 根据引理1.16，有 $\lambda\in V\backslash H$ 使得 $\sigma_1(\lambda)=\zeta_{\sigma_1}\lambda$，其中 ζ_{σ_1}是 F 中$\neq$1的单位根. 对任意 $i=2,\cdots,r$，可设 $\sigma_i(\lambda)=\zeta_{\sigma_i}\lambda+\mu_i$，其中 $\zeta_{\sigma_i}\in F$，而 $\mu_i\in H$. 经计算可得 $\sigma_i^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_i\sigma_1(\lambda)=\lambda+(\zeta_{\sigma_1}-1)\mu_i$. $\sigma_i^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_i\sigma_1$是有限阶元，设它的阶等于 m，那么 $m(\zeta_{\sigma_1}-1)\mu_i=0$，因此 $\mu_i=0$. 于是$\sigma_i\lambda=\zeta_{\sigma_i}\lambda, i=1,\cdots,r$，因此 ζ_{σ_i}是 F 中的单位根，用 U 表示 F 中所有单位根组成的乘法群，那么映射

$$G_H\to U,$$

$$\sigma_i\mapsto\zeta_{\sigma_i}$$

就是群同构映入. 因为 F 上任意 n 次多项式顶多有 n 个根，所以 F 的乘法群的有限子群都是循环群，因此 G_H 也是循环群，设 σ_i 是 G_H 的生成元，那么 ζ_{σ_i}就是 r 次本原单位根. □

命题1.25 设 V 是特征0的域 F 上的 n 维向量空间，G 是 $GL(V)$的有限子群，并假定 G 有一组基本不变式，而 $d_1,\cdots,d_n$ 是 G 的次数，再设 G 一共有 N 个伪反射，那么

$$d_1d_2\cdots d_n=|G|,$$

$$(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_n-1)=N.$$

证 设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 G 的一组基本不变式，而 $\deg f_i=d_i, i=1,\cdots,n$，那么$F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_n]$. 根据命题1.13，

$$P(F[V^*]^G,t)=\sum_{d=0}^{\infty}\dim F[V^*]_d^G t^d=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-t^{d_i}}.$$

再利用定理1.15中 Molien 公式(1-6)，就得到

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-\sigma t)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-t^{d_i}}.\tag{1-25}$$

将(1-25)式双方乘以$(1-t)^n$，就有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-\sigma t)}(1-t)^n$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}}\tag{1-26}$$

(1-26)式左方和式中，$\sigma=1$的一项正好等于1，$\sigma\neq1$的各项表成分子和分母互素的t的有理分式时，分子都含$1-t$为因式. 因此将$t=1$代入(1-26)式，就得到$|G|^{-1}=(d_1d_2\cdots d_n)^{-1}$，因此$|G|=d_1d_2\cdots d_n$.

再细致研究一下(1-26)式左方的和式，σ是伪反射$\sigma_i(i=1,\cdots,N)$时，σ_i有$n-1$个特征值等于1，而有一个特征值$\neq1$，设为ζ_i. 那么(1-26)式左方和式中σ_i这一项就等于

$$\frac{1-t}{1-\zeta_i t},\quad i=1,\cdots,N.$$

(1-26)式左方其余各项表成分子和分母互素的t的有理分式时，分子都含$(1-t)^2$为因式. 因此(1-26)式可以表成

$$\frac{1}{|G|}\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{1-t}{1-\zeta_i t}+(1-t)^2h(t)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}},\tag{1-27}$$

其中$h(t)$的分母不含$1-t$为因式. 将(1-27)式对t求导，得到

$$\frac{1}{|G|}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\zeta_i-1}{(1-\zeta_i t)^2}-2(1-t)h(t)+(1-t)^2h'(t)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}}\right)\times$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{1+2t+\cdots+(d_i-1)t^{d_i-2}}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}}\right).$$

将$t=1$代入上式，就得到

$$-\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i}=-\frac{(1/2)\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)}{d_1d_2\cdots d_n}.$$

上面已经证明$|G|=d_1d_2\cdots d_n$，因此有

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)=2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i}.\tag{1-28}$$

设H是V的$n-1$维子空间，并设$G_H=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_{r-1},\sigma_r=1\}$.

根据引理1.24，有 $\lambda\in V\backslash H$ 使得对 $i=1,2,\cdots,r$ 都有 $\sigma_i(\lambda)=\zeta_{\sigma_i}\lambda$，其中 ξ_{σ_i} 是单位根，显然 $G_H=\{\sigma_1^{-1},\cdots,\sigma_{r-1}^{-1},\sigma_r^{-1}=1\}$，而 $\zeta_{\sigma_i^{-1}}=\zeta_{\sigma_i}^{-1}$，因此 $\zeta_{\sigma_1}^{-1},\cdots,\zeta_{\sigma_{r-1}}^{-1}$ 是 $\zeta_{\sigma_1},\cdots,\zeta_{\sigma_{r-1}}$ 的一个排列，那么

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{1-\zeta_{\sigma_i}}&=\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{1-\zeta_{\sigma_i}^{-1}}\\&=\sum_{i=1}^{r-1}\left(1-\frac{1}{1-\zeta_{\sigma_i}}\right)=(r-1)-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{1-\zeta_{\sigma_i}}.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{1-\zeta_{\sigma_i}}=\frac{r-1}{2}.$$

因为 G 是有限群，V 只有有限个 $n-1$ 维子空间可以作为 G 中伪反射的反射超平面. 对每一个这样的 $n-1$ 维子空间作上面的计算，然后把结果加起来，就得到

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i}=\frac{N}{2}$$

再从(1.28)式就推出 $\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)=N.$ □

显然(b)⇒(c)是命题1.25的结论之一. 前面已经证明了(a)⇒(d)⇒(b)，所以有

命题1.26　设 G 是作用在特征0的域 F 上 n 维向量空间 V 上的有限伪反射群，$d_1,\cdots,d_n$ 是 G 的次数，而 G 一共有 N 个伪反射，那么

$$d_1d_2\cdots d_n=|G|,$$

$$(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_n-1)=N.$$ □

为了证明(c)⇒(b)，需要下面这个引理.

引理1.27　设 V 是域 F 上的 n 维向量空间，G 是 $GL(V)$ 的有

限子群，并假定 G 有一组基本不变式 $f_1,\cdots,f_n$，$\deg f_i=d_i(i=1,\cdots,n)$，而 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，再设 $g_1,\cdots,g_n$ 是 G 的 n 个代数无关的齐次不变式，$\deg g_i=e_i(i=1,\cdots,n)$，而 $e_i\leqslant e_2\leqslant\cdots\leqslant e_n$. 那么 $e_i\geqslant d_i(i=1,\cdots,n)$. 更进一步，如果 $e_i=d_i(i=1,\cdots,n)$，那么 $F[V^*]^G=F[g_1,\cdots,g_n]$，即 $g_1,\cdots,g_n$ 也是 G 的一组基本不变式.

证　先证明 $e_1\geqslant d_1$，根据假设 $F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_n]$，而 $g_1\in F[V^*]^G$，所以 g_1 是 $f_1,\cdots,f_n$ 的多项式，因此一定有 $e_1\geqslant d_1$.

再设 $k>1$，并且 $e_i\geqslant d_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 都已经证明，去证 $e_k\geqslant d_k$，如果 $e_k<d_k$，因为 $F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_n]$，那么 $g_1,\cdots,g_k$ 都是 $f_1,\cdots,f_{k-1}$ 的多项式. 于是 $F(g_1,\cdots,g_k)\subset F(f_1,\cdots,f_{k-1})$. 因为 $g_1,\cdots,g_n$ 在 F 上代数无关，所以 $F(g_1,\cdots,g_k)$ 在 F 上的超越次数等于 k. 可是 $F(f_1,\cdots,f_{k-1})$ 在 F 上的超越次数等于 $k-1$，这是一个矛盾，所以 $e_k\geqslant d_k$.

根据数学归纳法原理，$e_i\geqslant d_i(i=1,\cdots,n)$.

再假设 $e_i=d_i(i=1,\cdots,n)$，不难推出，对任意非负整数 d，$g_1,\cdots,g_n$ 的 d 次齐次多项式组成的空间有一组基

$$g_1^{i_1}\cdots g_n^{i_n},\quad i_1,\cdots,i_n\geqslant 0,i_1e_1+\cdots+i_ne_n=d.$$

那么它的维数就等于把 d 分拆成若干个 $e_1,\cdots$，若干个 e_n 的和的分拆数，而后面这个数又等于 $F[V^*]_d^G$. 因此 $F[g_1,\cdots,g_n]_d=F[V^*]_d^G$. 所以 $F[g_1,\cdots,g_n]=F[V^*]^G$，即 $g_1,\cdots,g_n$ 也是 G 的一组基本不变式. □

现在来证明(c)⇒(b). 设 V 是特征0的域 F 上的 n 维向量空间，G 是作用在 V 上的有限线性变换群，$f_1,\cdots,f_n$ 是 G 的 n 个代数无关的齐次不变式，$\deg f_i=d_i(1\leqslant i\leqslant n)$，而 $|G|=d_1d_2\cdots d_n$，那么 $F[V^*]^G\supset F[f_1,\cdots,f_n]$，于是 $F[V^*]_d^G\supseteq F[f_1,\cdots,f_n]_d$，$\dim F[V^*]_d^G\geqslant\dim F[f_1,\cdots,f_n]_d$. 由命题1.13，当 $0\leqslant t<1$ 时，有

$$P(F[f_1,\cdots,f_n],t)=\sum_{d=0}^{\infty}\dim F[f_1,\cdots,f_n]_dt^d$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})^{-1}.$$

由命题1.15，当$0\leqslant t<1$时，有

$$P(F[V^*]^G,t)=\sum_{d=0}^{\infty}\dim F[V^*]_d^G t^d$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-\sigma t)},$$

因此

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-\sigma t)}\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})^{-1},\quad 0\leqslant t<1.$$

用$H=\{\sigma_i,i=1,\cdots,N\}$表$G$中伪反射组成的集合，并用$\zeta_i$表示$\sigma_i$的$\neq 1$的那个特征值，将上式双方乘以$(1-t)^{n-1}$，就得到

$$\frac{1}{|G|}\left(\frac{1}{1-t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i t}+\sum_{\sigma\neq 1,\sigma\notin H}\frac{(1-t)^{n-1}}{\det(1-\sigma t)}\right)$$

$$\geqslant(1-t)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})^{-1},\quad 0\leqslant t<1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i t}+\sum_{\sigma\neq 1,\sigma\notin H}\frac{(1-t)^{n-1}}{\det(1-\sigma t)}$$

$$\geqslant\frac{|G|-\prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})}{(1-t)\prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})},\quad 0\leqslant t<1.$$

令$q(t)=(1-t)^{-1}\left(|G|-\prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})\right)$，则

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i t}+\sum_{\sigma\neq 1,\sigma\notin H}\frac{(1-t)^{n-1}}{\det(1-\sigma t)}$$

$$\geqslant\frac{q(t)}{\prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})},\quad 0\leqslant t<1.$$

在上式中令$t\to 1$，就得到

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}d_i\right)^{-1}\lim_{t\to 1}q(t).$$

根据命题1.25的证明$\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{1-\zeta_i}=\frac{N}{2}$. 令 G_0表示 G 中伪反射生成的群，那么$|G_0|<\infty$，令 $e_1,\cdots,e_n$ 表 G_0的次数. 根据引理1.27，可以假定 $e_i\leqslant d_i(1\leqslant i\leqslant n)$，根据命题1.26，$\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i-1)=N$. 根据 L′hospital法则，

$$\lim_{t\to 1}q(t)=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|G|-\prod\limits_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n}d_i\right)\sum_{i=1}^{n}(d_i-1).$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i-1)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i-1)$. 根据引理1.27的第一个断言，$d_i\geqslant e_i(i=1,\cdots,n)$. 因此 $d_i=e_i(i=1,\cdots,n)$，$G_0=G$，即 G 是有限伪反射群，而 $d_1,\cdots,d_n$ 是 G 的次数. 再根据引理1.27的第二个断言，$F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_r]$.

为了给出(b)⇒(a)的证明，需要下面这个利用 Jacobi 行列式来判断一组多项式是否代数无关的命题.

命题1.28　设 F 是任意域，$f_1,\cdots,f_n$ 是 F 上 n 个未定元 $X_1,\cdots,X_n$的多项式，那么 $f_1,\cdots,f_n$ 在 F 上代数无关，当且仅当它们的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(X_1,X_2,\cdots,X_n)}=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0.$$

证　假定 $f_1,\cdots,f_n$ 代数相关，那么 F 上有一个 n 个未定元 $Y_1,\cdots,Y_n$的非零多项式 $h(Y_1,\cdots,Y_n)$使

$$h(f_1,\cdots,f_n)=0. \tag{1-29}$$

可以假定 h 的次数尽可能地小，固定一个 j，将(1-29)式对 X_j 求偏导，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial Y_i}(f_1,\cdots,f_n)\frac{\partial f_i}{\partial X_j}=0,\quad j=1,\cdots,n.$$

这是$\dfrac{\partial h}{\partial Y_i}(f_1,\cdots,f_n)$，$i=1,\cdots,n$，适合的一组线性方程，其系数矩阵是

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right).$$

如果 $h\in F$，由(1-29)式一定有 $h=0$，与 h 是非零多项式的假设矛盾. 因此 $h\notin F$，于是偏导$\dfrac{\partial h}{\partial Y_i}(i=1,\cdots,n)$中一定有一个$\neq 0$，设$\dfrac{\partial h}{\partial Y_j}\neq 0$. 因为 h 选为次数尽可能小的多项式使(1-29)式成立，所以$\dfrac{\partial h}{\partial Y_j}(f_1,\cdots,f_n)\neq 0$，因此

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)=0.$$

反之，设 $f_1,\cdots,f_n$ 代数无关. 因为 $F(X_1,\cdots,X_n)$在 F 上的超越次数等于 n，所以对每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$；$X_i,f_1,\cdots,f_n$ 都代数相关，于是有 F 上 $n+1$个未定元 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的非零多项式 $h_i(Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)$使

$$h_i(X_i,f_1,\cdots,f_n)=0.$$

可以假定 h_i 是使上式成立的次数最低的多项式. 将上式对 X_k 求偏导，

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial Y_j}(X_i,f_1,\cdots,f_n)\frac{\partial f_j}{\partial X_k}+\frac{\partial h_i}{\partial Y_0}(X_i,f_1,\cdots,f_n)\delta_{ik}=0. \tag{1-30}$$

因为 $f_1,\cdots,f_n$ 在 F 上代数无关，h_i 对于 Y_0的次数一定>0. 于是

$\frac{\partial h_i}{\partial Y_0}\neq 0$，而 $\deg \frac{\partial h_i}{\partial Y_0}<\deg h_i$. 根据对 h_i 所作的假定，一定有$\frac{\partial h_i}{\partial Y_0}(X_i, f_1,\cdots,f_n)\neq 0$. 将(1-30)式中最后一项移到等式右方，再把这些方程写成如下的矩阵形式

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial Y_j}\right)\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_k}\right)=\left(-\delta_{ik}\frac{\partial h_i}{\partial Y_0}\right).$$

上式右方是一个对角矩阵而对角线元素全不等于零，所以上式左方的 Jacobi 行列式也不等于零. □

现在给出定理1.17中(b)⇒(a)的证明.

(b)⇒(a)的证明 设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 G 的 n 个代数无关的齐次不变式，而 $F[V^*]^G=F[f_1,\cdots,f_n]$. 令 $\deg f_i=d_i(i=1,\cdots,n)$. 设 G_0是由 G 中伪反射生成的子群. 根据(a)⇒(b)，$F[V^*]^{G_0}=F[g_1,\cdots,g_n]$，其中 $g_1,\cdots,g_n$ 是 F 上 n 个代数无关的 G_0的齐次不变式. 令 $\deg g_i=e_i(i=1,\cdots,n)$. 显然$F[V^*]^G\subset F[V^*]^{G_0}$，因此每个 f_i 都可以表成 $g_1,\cdots,g_n$ 的多项式

$$f_i=F_i(g_1,\cdots,g_n).$$

取消多余的项之后，可以假定 F_i 中的单项式 $g_1^{k_1}\cdots g_n^{k_n}$ 都适合条件 $\sum_{i=1}^{n}e_ik_i=d_i$，将 f_i 对 x_k 求偏导，

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_k}=\sum_j\frac{\partial F_i}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial X_k}.$$

根据命题1.28，Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)\neq 0,$$

因此

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial g_j}\right)\neq 0.$$

重排 $g_1,\cdots,g_n$ 之后可设这个行列式中下面这一项

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial g_i} \neq 0.$$

因此 g_i 一定在 F_i 中出现，于是 $d_i \geqslant e_i (i=1,\cdots,n)$. 将命题1.25和1.26的第二个结论分别应用到 G 和 G_0上来，就有

$$\sum (d_i - 1) = N \quad 和 \quad \sum (e_i - 1) = N,$$

因此 $d_i = e_i$，再把命题1.25和1.26的第一个结论应用到 G 和 G_0上来，

$$|G| = d_1 d_2 \cdots d_n = |G_0|,$$

因此 $G = G_0$. 这就是说，G 是由它所含的伪反射生成的群，因此 G 是有限伪反射群.

这样，定理1.17就完全证明了.

§1.5 有限伪反射群的相对不变式

仍设 G 是作用在特征0的域 F 上的 n 维向量空间 V 上的有限伪反射群，再设 $\chi: G \to F^*$ 是 G 的一个1维表示. 对于 $f \in F[V^*]$，如果 $\sigma \cdot f = \chi(\sigma) f$，$f$ 就叫做 G 的 χ-相对不变式. 显然

$$\det: G \to F^*$$
$$\sigma \mapsto \det \sigma$$

是 G 的1维表示，因此有 G 的 det-相对不变式的概念.

例如，van der Monde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

是 n 个文字的对称群 S_n 的 det-相对不变式，而且它还是齐次式. 设 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式，那么它们的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

也是 S_n 的 det-相对不变式. 熟知，S_n 的任一 det-相对不变式都是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式的 Jacobi 行列式和 S_n 的一个不变式的乘积，这一结果可以推广到有限伪反射群上去.

这里先来讨论有限伪反射群的一组基本不变式的 Jacobi 行列式的因子分解.

命题1.29　设 G 是作用在特征0的域 F 上的 n 维向量空间 V 上的有限伪反射群，$\sigma_1,\cdots,\sigma_N$ 是 G 中所有的伪反射，它们的反射超平面分别是 $H_1,\cdots,H_N$，$f_1,\cdots,f_n$ 是 G 的一组基本不变式. 再设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$x_1,\cdots,x_n$ 是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 在 V^* 中的对偶基，H_i 由 $l_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ 所定义，$l_i(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的齐次线性式，即 $H_i=\{\lambda\in V\mid l_i(x_1,\cdots,x_n)(\lambda)=0\}$. 那么把 $f_1,\cdots,f_n$ 看作 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式，有

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=c\prod_{i=1}^{N}l_i(x_1,\cdots,x_n),\qquad(1\text{-}31)$$

其中 $c\in F,c\neq 0$.

证　用 J 表(1-31)式左方，显然 $\deg J=\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i-1)$. 根据命题1.26，$\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i-1)=N$，因此 $\deg J=N$，这验证了(1-31)式双方的次数相等.

设 H 是 G 中伪反射的反射超平面. 根据引理1.24，可以设 $G_H=\{\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{r-1},\sigma^r=1\}$，那么 $H_1,\cdots,H_N$ 中一共有 $r-1$ 张超平面等于 H. 选 V 的一组基 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 使 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_{n-1}'$ 是 H 的基，而 $\sigma^i(\varepsilon_n')=\zeta_{\sigma^i}\varepsilon_n'$，其中 $\zeta_{\sigma^i}=\zeta_\sigma^i$，而 ζ_σ 是本原 r 次单位根. 再设 $x_1',\cdots,x_n'$ 是 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 在 V^* 中的对偶基，那么 H 由 $x_n'=0$ 所定义. 不难验证，对 $i=1,\cdots,r$，$\sigma^i\cdot x_j'=x_j'(1\leqslant j\leqslant n-1)$ 而 $\sigma^i\cdot x_n'=x_n'$. 可设 $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{ij}x_j'$，$i=1,\cdots,n$，其中 $T=(t_{ij})\in GL_n(F)$. 再设对于 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，

H 由 $l_H(x_1,\cdots,x_n)=0$所定义，这里 $l_H(x_1,\cdots,x_n)$是 $x_1,\cdots,x_n$ 的齐次线性式，那么

$$x_n' = c_H l_H\Big(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, x_j',\cdots,\sum_{j=1}^{n} t_{nj}\, x_j'\Big),$$

其中 $c_H\in F$，$c_H\neq 0$. 把 $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}x_j'$，$i=1,\cdots,n$，代入 $f_k(k=1,\cdots,n)$把得到的$x_1',\cdots,x_n'$的多项式记作 $g_k(x_1',\cdots,x_n')$，即

$$g_k(x_1',\cdots,x_n') = f_k\Big(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, x_j',\cdots,\sum_{j=1}^{n} t_{nj}\, x_j'\Big),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

那么由 $\sigma\cdot g_k=g_k(k=1,\cdots,n)$推出

$$g_k(x_1',\cdots,x_{n-1}',\zeta_\sigma^{-1}x_n')=g_k(x_1',\cdots,x_{n-1}',x_n'),k=1,2,\cdots,n. \tag{1-32}$$

将 $g_k(x_1',\cdots,x_n')$表作

$$g_k(x_1',\cdots,x_n') = \sum_{m\geqslant 0} h_m({}^{-1}_{\sigma}x_n' x_1',\cdots,x_{n-1}')\, x_n'^{\,m},$$

那么从(1-32)式推出，如果 $r\nmid m$，则 $h_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')=0$. 特别，当$0<m<r$ 时，$h_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')=0$. 又有

$$\frac{\partial g_k(x_1',\cdots,x_n')}{\partial x_n'} = \sum_{m>0} m h_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')\, x_n'^{\,m-1},$$

因此

$$x_n'^{\,r-1}\,\Big|\,\frac{\partial g_k(x_1',\cdots,x_n')}{\partial x_n'},\quad k=1,\cdots,n.$$

所以

$$x_n'^{\,r-1}\,\Big|\,\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x_1',\cdots,x_n')}. \tag{1-33}$$

因为

$$\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x_1',\cdots,x_n')} = \frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\,\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(x_1',\cdots,x_n')} = J\det T,$$

所以(1-33)式与

$$l_H(x_1,\cdots,x_n)^{r-1}\,|\,J$$

等价. 对 G 中伪反射的反射超平面都重复上面的讨论，就得到

$$\prod_{i=1}^{N} l_i(x_1,\cdots,x_n) \Big| J.$$

因为它们的次数相等，所以(1-31)式成立. □

命题1.30　设 G 是作用在特征0的域 F 上的向量空间 V 上的有限伪反射群，而 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 G 的 n 个代数无关的齐次不变式，它们在 F 上生成 F-代数$F[V^*]^G$. 令

$$J=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}.$$

那么

(a)　$\sigma\cdot J=(\det\sigma)J,\forall\ \sigma\in G$;

(b)　设 $p\in F[V^*]$而 $\sigma\cdot p=(\det\sigma)p,\forall\ \sigma\in G$，那么 $p=Jg$，而$g\in F[V^*]^G$;

(c)　对 $k=0,1,2,\cdots$，令 A_k 表示 G 的 k 次 det-相对不变式组成的 F 上的向量空间，那么 $\dim A_k=\dim F[V^*]^G_{k-N}$.

证　(a)显然成立. 再来证明(b). 设 $p\in F[V^*]$而 $\sigma\cdot p=(\det\sigma)p,\forall\ \sigma\in G$. 沿用命题1.29中的记号，设 H 是 G 中伪反射的一个反射超平面，$G_H=\langle\sigma\rangle$而 σ 的阶等于 r，选 V 的基$\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 使 $\sigma^i(\varepsilon_j')=\varepsilon_j'\ (1\leqslant j\leqslant n-1)$，而 $\sigma^i(\varepsilon_n')=\zeta_{\sigma^i}\varepsilon_n',\zeta_{\sigma^i}=\zeta_\sigma^i,\zeta_\sigma$ 是本原 r 次单位根. 设$x_1',\cdots,x_n'$ 是 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 在 V^* 中的对偶基，那么 H 由 $x_n'=0$所定义，$\sigma^i\cdot x_j'=x_j'\ (1\leqslant j\leqslant n-1)$而 $\sigma^i\cdot x_n'=\zeta_{\sigma^i}^{-1}x_n'$. 可设 $x_i=\sum_{j=1}^{r}t_{ij}x_j',i=1,\cdots,n$. 令

$$q(x_1',\cdots,x_n')=p(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j',\cdots,\sum_{j=1}^{n}x_{nj}x_j')$$

因 $\sigma\cdot q=(\det\sigma)q$，而 $\det\sigma=\zeta_\sigma$，所以

$$q(x_1',\cdots,x_{n-1}',\zeta_\sigma^{-1}x_n')=\zeta_\sigma q(x_1',\cdots,x_{n-1}',x_n'). \qquad (1\text{-}34)$$

将 $q(x_1',\cdots,x_n')$写成

$$q(x_1',\cdots,x_n')=\sum_{m\geqslant 0}q_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')\,x_n'^{\,m},$$

那么(1-34)式就可以写成

$$\sum_{m\geqslant 0} q_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')\zeta_\sigma^{-m}\, x_n'^{m} = \zeta_\sigma \sum q_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')\, x_n'^{m}.$$

比较上式双方的系数，就推出当 $r\nmid m$ 时，$q_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')=0$. 特别当 $0\leqslant m<r$ 时，$q_m(x_1',\cdots,x_{n-1}')=0$，因此 $x_n'^{r-1}\mid q(x_1',\cdots,x_n')$. 再设对于 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，$H$ 由 $l_H(x_1,\cdots,x_n)=0$ 所定义，这里 $l_H(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的齐次线性式，那么和命题1.29的证明一样，就有 $l_H(x_1,\cdots,x_n)^{r-1}\mid p(x_1,\cdots,x_n)$. 对 G 中伪反射的反射超平面都重复以上的讨论，就得到 $J\mid p(x_1,\cdots,x_n)$. 令 $g=P/J\in F[V^*]$，那么显然有 $\sigma\cdot g=g$，$\forall\ \sigma\in G$.

(c)是(b)的直接推论. □

§1.6　有限伪反射群的次数 Solomon 定理

定理1.31　设 F 是特征0的域，V 是 F 上的 n 维向量空间，G 是作用在 V 上的有限伪反射群，而 $d_1,\cdots,d_n$ 是 G 的次数，$m_i=d_i-1$，$i=1,\cdots,n$. 再设 g_r 是 G 中那些元素的个数，它们的不变向量组成 r 维子空间，$r=0,1,\cdots,n$. 那么

$$(t+m_1)(t+m_2)\cdots(t+m_n)=g_0+g_1t+\cdots+g_nt^n. \tag{1-35}$$

注意，命题1.26是这个定理的简单推论，把 $t=1$ 代入(1-35)式就得到 $d_1d_2\cdots d_n=g_0+g_1+\cdots+g_n=|G|$；比较(1-35)式双方 t^{n-1} 的系数就得到 $(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_n-1)=g_{n-1}=G$ 中伪反射的个数.

Shephard-Todd 于1954年对一个个的不可约有限反射群观察出(1-35)式成立，Solomon 于1963年对任意有限反射群给出了(1-29)式的一般证明. 下面介绍 Solomon 的证明，这需要引进微分 p-齐式.

设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，按公式 $x_i(\varepsilon_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 来定义 $x_1,\cdots,x_n\in V^*$. 再设 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 是 F 上的 n 个符号. 设 p 是

非负整数而$0\leqslant p\leqslant n$. 所谓 F 上的微分 p-齐式就指以下形状的表达式

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} r_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p},$$

其中 $r_{i_1\cdots i_p}(x)=r_{i_1\cdots i_p}(x_1,\cdots,x_n)\in F(x_1,\cdots,x_n)$. 下面把求和范围$1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 简记作 $i_1<\cdots<i_p$. 微分 p-齐式也简称为 p-齐式，显然0-齐式就是 F 中的元素. 设

$$\eta=\sum_{i_1<\cdots<i_p} s_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}$$

是另一个 p-齐式，定义 $\omega=\eta$ 当且仅当

$$r_{i_1\cdots i_p}(x)=s_{i_1\cdots i_p}(x),\quad \forall_{i_1,\cdots,i_p}\text{ 而 }1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n.$$

再定义

$$\omega+\eta=\sum_{i_1<\cdots<i_p}(r_{i_1\cdots i_p}(x)+s_{i_1\cdots i_p}(x))\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}.$$

对于任一 $r(x)\in F(x_1,\cdots,x_n)$，定义

$$r(x)\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p} r(x)r_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p},$$

那么全体 p-齐式组成域 $F(x_1,\cdots,x_n)$上的一个$\binom{n}{p}$维向量空间，记作 D_p. 令

$$D=D_0\oplus D_1\oplus\cdots\oplus D_n.$$

定义

$$\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

而两个齐式 ω 和 η 的积按上式和分配律来定义. 在上式中令 $i=j$，得 $\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i=0(i=1,\cdots,n)$. 对于 p-齐式 ω 和 q-齐式 η，有

$$\omega\eta=(-1)^{pq}\eta\omega;$$

特别当 p 为奇数时，$\omega\omega=0$. 不难看出，D 对于乘法是封闭的，因此 D 组成域 $F[x_1,\cdots,x_n]$上的2^n 维反交换代数.

对于任一 $r(x)\in F(x_1,\cdots,x_n)$，定义1-齐式

$$\mathrm{d}r=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

对于 $r_1(x),\cdots,r_n(x)\in F(x_1,\cdots,x_n)$，不难验证

$$\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_n=\frac{\partial(r_1,\cdots,r_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n, \tag{1-36}$$

式中

$$\frac{\partial(r_1,\cdots,r_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\det\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$$

是 Jacobi 行列式.

设 $\sigma\in GL(V)$，$\omega=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_p} r_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}$，定义

$$\sigma\cdot\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p} r_{i_1\cdots i_p}(\sigma^{-1}\cdot x)\mathrm{d}(\sigma^{-1}\cdot x_{i_1})\cdots\mathrm{d}(\sigma^{-1}\cdot x_{i_p}),$$

其中 $\sigma^{-1}\cdot x$ 是 $\sigma^{-1}\cdot x_1,\cdots,\sigma^{-1}\cdot x_n$ 的缩写，而

$$\mathrm{d}(\sigma^{-1}\cdot x_{i_j})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(\sigma^{-1}\cdot x_{i_j})}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k,\quad j=1,2,\cdots,p.$$

如果把 D_p 看成是 F 上的向量空间(注意，它是无限维的)，σ 就成了 D_p 上的线性变换，对于任意两个齐式 ω 和 η，不难验证

$$\sigma\cdot(\omega\eta)=(\sigma\cdot\omega)(\sigma\cdot\eta).$$

设 G 是 $GL(V)$ 的子群，而 ω 为 p-齐式，如果对任意 $\sigma\in G$ 都有 $\sigma\cdot\omega=\omega$，ω 就叫 G-不变 p-齐式.

引理1.32 设 $\sigma\in GL(V)$，$r(x)\in F(x_1,\cdots,x_n)$，那么 $\sigma\cdot\mathrm{d}r=\mathrm{d}(\sigma\cdot r)$.

证 按定义，

$$\sigma\cdot\mathrm{d}r=\sigma\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial x_i}(\sigma^{-1}\cdot x)\mathrm{d}(\sigma^{-1}\cdot x_i),$$

$$\mathrm{d}(\sigma\cdot r)=\mathrm{d}r(\sigma^{-1}\cdot x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(r(\sigma^{-1}\cdot x))\mathrm{d}x_i.$$

设 $\sigma^{-1}\cdot x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，而 $a_{ij}\in F$，那么

$$\mathrm{d}(\sigma^{-1}\cdot x_i)=\mathrm{d}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_j,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(r(\sigma^{-1}\cdot x)) &= \frac{\partial}{\partial x_i}r(\sigma^{-1}\cdot x_1,\cdots,\sigma^{-1}\cdot x_n)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}r(\sum_j a_{1j}x_j,\cdots,\sum_j a_{nj}x_j)\\ &= \sum_k \frac{\partial r}{\partial x_k}(\sigma^{-1}\cdot x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{kj}x_j)\\ &= \sum_k \frac{\partial r}{\partial x_k}(\sigma^{-1}\cdot x)a_{ki}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\sigma\cdot r) &= \sum_i\sum_k \frac{\partial r}{\partial x_k}(\sigma^{-1}\cdot x)a_{ki}\mathrm{d}x_i = \sum_k \frac{\partial r}{\partial x_k}(\sigma^{-1}\cdot x)\mathrm{d}(\sigma^{-1}\cdot x_k)\\ &= \sigma\cdot\mathrm{d}r.\end{aligned}$$ □

命题1.33 设 G 是有限伪反射群，而 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是它的一组基本不变式，那么每个以多项式为系数的 G-不变 p-齐式都可以唯一地表成

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p},\quad a_{i_1\cdots i_p}(x)\in F[f_1,\cdots,f_n].$$

证 根据引理1.32，$\sigma\cdot(\mathrm{d}f_i)=\mathrm{d}(\sigma\cdot f_i)=\mathrm{d}f_i, i=1,\cdots,n$. 因此 $\mathrm{d}f_1,\cdots,\mathrm{d}f_n$ 都是 G-不变的1-齐式，因此如果 $a_{i_1\cdots i_p}(x)\in F[f_1,\cdots,f_n], 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$，那么

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p}$$

是 G-不变 p-齐式.

再来证明 $\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p}, 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 组成 D_p 在 $F(x_1,\cdots,x_n)$上的一组基. 只要证明它们在 $F(x_1,\cdots,x_n)$上线性无关. 假定

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p}=0, c_{i_1\cdots i_p}(x)\in F(x_1,\cdots,x_n).$$

设 $j_1,\cdots,j_p$ 适合 $1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$，再设 $j_{p+1},\cdots,j_n$ 适合 $1\leqslant j_{p+1}<\cdots<j_n\leqslant n$，而 $j_1,\cdots,j_p,j_{p+1},\cdots,j_n$ 是$1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

将上式乘以 $\mathrm{d}f_{j_{p+1}}\cdots\mathrm{d}f_{j_n}$就得到

$$c_{j_1\cdots j_p}(x)\mathrm{d}f_{j_1}\cdots\mathrm{d}f_{j_n}=0.$$

但是,由(1-36)式得

$$\mathrm{d}f_{j_1}\cdots\mathrm{d}f_{j_n}=\frac{\partial(f_{j_1},\cdots,f_{j_n})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\neq0,$$

所以 $c_{j_1\cdots j_p}(x)=0$对所有适合$1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$ 的 $j_1,\cdots,j_p$. 这证明了 $\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p}$,$1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$,在 $F(x_1,\cdots,x_n)$上线性无关.

设 ω 是 p-齐式,那么 ω 可以唯一地表成

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p},\quad a_{i_1\cdots i_p}(x)\in F(x_1,\cdots,x_n).\tag{1-37}$$

如果 ω 是 G-不变 p-齐式,前面已经证明 $\mathrm{d}f_1,\cdots,\mathrm{d}f_n$ 都是 G-不变的,将(1-37)式双方作用任一 $\sigma\in G$ 就推出 $\sigma\cdot a_{i_1\cdots i_p}(x)=a_{i_1\cdots i_p}(x)$, $\forall\ \sigma\in G$,因此 $a_{i_1\cdots i_p}(x)\in F(x_1,\cdots,x_n)^G=F(f_1,\cdots,f_n)$. 对于任一 $j_1,\cdots,j_p$具有性质$1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$,设$\{j_{p+1},\cdots,j_n\}=\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_p\}$而$1\leqslant j_{p+1}<\cdots<j_n\leqslant n$. 将(1-37)式双方乘以 $\mathrm{d}f_{j_{p+1}}\cdots\mathrm{d}f_{j_n}$,得到

$$\omega\mathrm{d}f_{j_{p+1}}\cdots\mathrm{d}f_{j_n}=a_{j_1\cdots j_p}(x)\frac{\partial(f_{j_1},\cdots,f_{j_n})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}\,x_n.$$

再设 ω 是以多项式为系数的 G-不变 P-齐式,那么由上式推出

$$a_{j_1\cdots j_p}(x)\frac{\partial(f_{j_1},\cdots,f_{j_n})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\in F[x_1,\cdots,x_n].$$

但是上面这个多项式是 det-相对不变式,所以根据命题1.30(b), $a_{j_1\cdots j_p}(x)\in F[V^*]^G$ 对所有适合条件$1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n$ 的 $j_1,\cdots,j_p$. □

命题1.34 设 G 是有限伪反射群,$d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是 G 的次数, $m_i=d_i-1(i=1,2,\cdots,n)$,对于 $\sigma\in G$ 设 $\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma)$是 σ 在 F 的代数闭包 $\bar{F}$ 中的 n 个特征值,再用 $s_p(x_1,\cdots,x_n)$表示 $x_1,\cdots,x_n$

的 p-次初等对称函数，而 $s_0(x_1,\cdots,x_n)=1$. 那么

$$\frac{s_p(t^{m_1},\cdots,t^{m_n})}{(1-t^{m_1+1})\cdots(1-t^{m_n+1})}=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{s_p(\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma))}{(1-\lambda_1(\sigma)t)\cdots(1-\lambda_n(\sigma)t)},$$
$$0\leqslant p\leqslant n. \tag{1-38}$$

（注：当 $p=0$时，上式就是(1-25)式.）

证 令

$$D_{pm}=\{\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}\,|\,a_{i_1\cdots i_p}(x)\in F[V^*]_m\},$$

显然 D_{pm}是 F 上有限维向量空间，对于任意 $\sigma\in G$ 和 $\omega\in D_{pm}$，$\sigma\cdot\omega\in D_{pm}$. 再令

$$I_{pm}=\{\omega\in D_{pm}\,|\,\sigma\cdot\omega=\omega,\forall\ \sigma\in G\},$$

则 I_{pm}是 D_{pm}的子空间，因而也是有限维的. 令 $d_{pm}=\dim I_{pm}$. 对于每一个 $p(0\leqslant p\leqslant n)$，引进 d_{pm}的生成函数

$$P_p(t)=\sum_{m=0}^{\infty}d_{pm}t^m.$$

设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 G 的一组基本不变式，并假设 $\deg f_i=d_i=m_i+1(1\leqslant i\leqslant n)$. 根据命题1.33，$I_{pm}$有下面这一组基

$$f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}\mathrm{d}f_{i_1}\cdots\mathrm{d}f_{i_p},$$
$$m=k_1(m_1+1)+\cdots+k_n(m_n+1)+m_{i_1}+\cdots+m_{i_p},$$

因此 d_{pm}等于将 m 拆成 $m=k_1(m_1+1)+\cdots+k_n(m_n+1)+m_{i_1}+\cdots+m_{i_p}$的方法数，而这个数正好是将

$$\frac{s_p(t^{m_1},\cdots,t^{m_n})}{(1-t^{m_1+1})\cdots(1-t^{m_n+1})}$$

展成 t 的形式幂级数时，t^m 的系数，因此有

$$P_p(t)=\frac{s_p(t^{m_1},\cdots,t^{m_n})}{(1-t^{m_1+1})\cdots(1-t^{m_n+1})}$$

再用定理1.15中的方法来计算 d_{pm}. 设 $\bar{F}$ 是 F 的代数闭包. 将 V 的基域 F 扩充到 $\bar{F}$，得到 $\bar{F}$ 上的 n 维向量空间 $\bar{V}$. 把 D_{pm}和 I_{pm}的基域 F 也扩充到 $\bar{F}$，就得到 $\bar{F}$ 上的向量空间 $\bar{D}_{pm}$和 $\bar{I}_{pm}$. 显然 $\bar{D}_{pm}$在

$\bar{F}$ 上的维数等于 D_{pm} 在 F 上的维数，$\bar{I}_{pm}$ 在 $\bar{F}$ 上的维数也等于 $\bar{I}_{pm}$ 在 F 上的维数 d_{pm}. 对任意 $\sigma\in G,\omega\in\bar{D}_{pm}$，也有 $\sigma\cdot\omega\in\bar{D}_{pm}$，而当 $\omega\in\bar{I}_{pm}$ 时，$\sigma\cdot\omega=\omega,\forall\ \sigma\in G$. 把 σ 看作 D_{pm} 上的线性变换时，记 $\sigma|_{D_{pm}}$；把 σ 看作 $\bar{D}_{pm}$ 上的线性变换时，记 $\sigma|_{\bar{D}_{pm}}$，显然有

$$\operatorname{Tr}\sigma|_{D_{pm}}=\operatorname{Tr}\sigma|_{\bar{D}_{pm}}.$$

根据引理1.14，

$$d_{pm}=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\operatorname{Tr}\sigma|_{\bar{D}_{pm}}.$$

对于一个给定的 $\sigma\in G$，令 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 σ 在 $\bar{V}$ 中的特征向量，而相应的特征值分别是 $\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma)$，那么 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\bar{V}$ 的一组基. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $\bar{V}^*$ 中与 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 对偶的基，那么 $\sigma\cdot x_i=\lambda_i(\sigma)^{-1}x_i,i=1,2,\cdots,n$. 根据引理1.32，又有 $\sigma\cdot\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}(\sigma\cdot x_i)=\mathrm{d}(\lambda_i(\sigma)^{-1}x_i)=\lambda_i(\sigma)^{-1}\mathrm{d}x_i,i=1,2,\cdots,n$. $\bar{D}_{pm}$ 有一组基

$$x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p},$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=m,\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n,$$

而

$$\begin{aligned}&\sigma\cdot x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}\\&=\lambda_1(\sigma)^{-m_1}\cdots\lambda_n(\sigma)^{-m_n}\lambda_{i_1}(\sigma)^{-1}\cdots\lambda_{i_p}(\sigma)^{-1}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}.\end{aligned}$$

显然 $\lambda_i(\sigma)^{-1}=\lambda_i(\sigma^{-1}),i=1,2,\cdots,n$，因此

$$d_{pm}=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\lambda_1(\sigma)^{m_1}\cdots\lambda_n(\sigma)^{m_n}s_p(\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma)).$$

于是

$$\begin{aligned}P_p(t)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\lambda_1(\sigma)^{m_1}\cdots\lambda_n(\sigma)^{m_n}s_p(\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma))\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{s_p(\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma))}{(1-\lambda_1(\sigma)t)\cdots(1-\lambda_n(\sigma)t)}.\end{aligned}$$

$P_p(t)$ 的两种表达式必须相等，因此有(1-38)式. □

命题1.35 对于 $1\leqslant p\leqslant n$，

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} \frac{t^{m_{i_1}+\cdots+m_{i_p}}}{(1-t^{m_{i_1}+1})\cdots(1-t^{m_{i_p}+1})}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{i_1<\cdots<i_p} \frac{\lambda_{i_1}(\sigma)\cdots\lambda_{i_p}(\sigma)}{(1-\lambda_{i_1}(\sigma)t)\cdots(1-\lambda_{i_p}(\sigma)t)}. \qquad (1\text{-}39)$$

证　对于$1\leqslant p\leqslant n$,不难证明下面的恒等式成立.

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} \frac{u_{i_1}+u_{i_p}}{(1-u_{i_1}t)\cdots(1-u_{i_p}t)}$$

$$= \frac{h_{p1}(t)s_1(u_1,\cdots,u_n)+\cdots+h_{pn}(t)s_n(u_1,\cdots,u_n)}{(1-u_1t)\cdots(1-u_nt)}, \quad (1\text{-}40)$$

其中$u_1,\cdots,u_n$是未定元,$h_{p1}(t),\cdots,h_{pn}(t)$是$t$的多项式.将上式中$u_i$用$\lambda_i(\sigma)$代入,再在群$G$上求平均,就得到一个公式,它的左方恰是(1-39)式右方,而它的右方

$$\sum_{k=1}^{n} h_{pk}(t)\,\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{s_k(\lambda_1(\sigma),\cdots,\lambda_n(\sigma))}{(1-\lambda_1(\sigma)t)\cdots(1-\lambda_n(\sigma)t)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} h_{pk}(t)\,\frac{s_k(t^{m_1},\cdots,t^{m_n})}{(1-t^{m_1+1})\cdots(1-t^{m_n+1})}$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{t^{m_{i_1}+\cdots+m_{i_p}}}{(1-t^{m_1+1})\cdots(1-t^{m_p+1})},$$

其中第一个等号是根据命题1.34,第二个等号是在(1-40)式中将u_i用$t^{m_i}(i=1,2,\cdots,n)$代入而得.因此(1-39)式成立.　□

定理1.31的证明　设$1\leqslant p\leqslant n$,将(1-39)式双方乘以$(1-t)^p$,再将$t=1$代入,那么

$$\text{左方}=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{1}{(m_{i_1}+1)\cdots(m_{i_p}+1)},$$

$$\text{右方}=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\lambda_{i_1}(\sigma)\cdots\lambda_{i_p}(\sigma)}{(1-\lambda_{i_1}(\sigma)t)\cdots(1-\lambda_{i_p}(\sigma)t)}(1-t)^p\bigg|_{t=1}.$$

如果σ的不变向量组成r维子空间,那么σ恰有r个特征值等于1.因此当$r<p$时,右方和式中σ那一项等于0;而当$r\geqslant p$时,σ的

那一项等于$\binom{r}{p}$，所以

$$右方=\frac{1}{|G|}\sum_{r=p}^{n}\binom{r}{p}g_r.$$

于是

$$\frac{1}{|G|}\sum_{r=p}^{n}\binom{r}{p}g_r=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{1}{(m_{i_1}+1)\cdots(m_{i_p}+1)}.$$

但是$|G|=(m_1+1)\cdots(m_n+1)$，所以

$$\sum_{r=p}^{n}\binom{r}{p}g_r=\sum_{i_1<\cdots<i_{n-p}}(m_{i_1}+1)\cdots(m_{i_{n-p}}+1). \qquad (1\text{-}41)$$

当 $p=0$时，上式左方$=g_0+g_1+\cdots+g_n=|G|$，而右方$=(m_1+1)\cdots(m_n+1)=|G|$，因此上式当 $p=0$时也成立.

对于$0\leqslant p\leqslant n$，将$t=1$代入(1-35)式双方的 p 次导函数就得到(1-41)式. 因此(1-35)式成立.

§1.7　习题

1.1　设V是域F上的n维向量空间，证明V上的线性函数的全体V^*，以F^V中的加法和纯量乘法为运算，也是F上的n维向量空间，再证明，如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，$x_1,\cdots,x_n\in V^*$，并适合条件$x_i(\varepsilon_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$，那么$x_1,\cdots,x_n$是$V^*$的一组基.

1.2　证明域F上的所有$n\times n$非奇异矩阵之集，以矩阵乘法为运算，组成一群，记作$GL_n(F)$. 再证明F上的n维向量空间V上的所有可逆线性变换之集，以映射的合成为运算，也组成一群，记作$GL(V)$. 设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，$\sigma\in GL(V)$，可设

$$\sigma\varepsilon_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}(\sigma)\varepsilon_i,\quad j=1,\cdots,n,\quad t_{ij}(\sigma)\in F,$$

那么映射$\sigma\mapsto(t_{ij}(\sigma))$是从$GL(V)$到$GL_n(F)$上的同构.

1.3　证明(1-1)式.

1.4　设F是无限域，V是F上的有限维向量空间，$f\in F[V^*]$，d是任意非负整数，证明$f\in F[V^*]_d$当且仅当$f(tx)=t^df(x)$，$\forall\ t\in F,x\in V$.

1.5　证明 Noether 环的同态像也是 Noether 环.

1.6　(a)设$n\geqslant1$而$d\geqslant0$，对d作归纳法证明

$$\sum_{j=0}^{d}\binom{n+j-1}{j}=\binom{n+d}{d};$$

(b)设 $n>1$,对 n 作归纳法证明

$$(1-t)^{-n}=\sum_{d=0}^{\infty}\binom{n+d-1}{d}t^d$$

1.7　设 V 是域 F 上的 n 维向量空间,$\sigma\in GL(V)$,并假定 σ 在 V 上可对角化,即 σ 有一组特征向量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,它们是 V 的一组基,并假设 $\sigma\varepsilon_i=\lambda_i(\sigma)\varepsilon_i$,$i=1,\cdots,n$. 设 V^* 是 V 的对偶空间,$x_1,\cdots,x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基,证明 $\sigma\cdot x_i=\lambda_i(\sigma)^{-1}x_i,i=1,\cdots,n$.

1.8　在例1.2中证明 $f_1^k,f_1^{k-1}f_2,\cdots,f_1f_2^{k-1},f_2^k$是$\mathbf{R}[V^*]_{2k}^G$的一组基.

1.9　在例1.1(续1)中证明,G 的任一不变式都可以唯一地表成形状 $p(f_1,f_2)+f_3q(f_1,f_2)$,这里 $p,q\in\mathbf{R}[X_1,X_2]$.

1.10　设 $V=\mathbf{R}^2$,$G\subset GL(V)$,而

$$G=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&-1/2\end{pmatrix}\right\rangle.$$

(a) 证明 G 和三个文字的对称群同构;

(b) 证明

$$P(\mathbf{R}[V^*]^G,t)=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{1+t+t^2}+\frac{3}{1-t^2}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(1+k(k+1)^{-1}t+t^2+t^3+t^4+t^5)t^k$$

(提示:后一等号用习题1.7来证);

(c) 试求 G 的一个2次齐次不变式和一个3次齐次不变式,并证明 G 的任一不变式都可以表成这两个齐次不变式的多项式,而且表法唯一.

1.11　设 $V=\mathbf{R}^2$而 G 是 $GL(V)$中把顶点为$(1,1)$,$(1,-1)$,$(-1,-1)$,$(-1,1)$的正方形变到自己的元素组成的群.

(a) 证明

$$P(\mathbf{R}[V^*]^G,t)=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{1+t^2}+\frac{4}{1-t^2}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(t^{4k}+t^{4k+2});$$

(b) 试求 G 的一个2次齐次不变式和一个4次齐次不变式,并证明 G 的任一不变式都可以表成这两个齐次不变式的多项式,而且表法唯一.

1.12　设 V 是无限域 F 上的有限维向量空间,G 是 $GL(V)$的子群,I 是常数项等于0的 G-不变式在 $F[V^*]$中生成的理想. 证明 I 是齐次理想,

$F[V^*]/I$是分次向量空间,而$(F[V^*]/I)_d=(F[V^*]_d+I)/I,d=0,1,\cdots$.

1.13 设A是分次F-次数,$A=A_0\oplus A_1\oplus\cdots\oplus A_d\oplus\cdots$,令$A_+=A_1\oplus A_2\oplus\cdots$. 设$h_1,\cdots,h_r$是$A$的齐次元,并假定$h_1,\cdots,h_r$在$A$中生成的理想不能由$\{h_1,\cdots,h_r\}$的任一真子集生成. 证明:如果有线性关系$a_1h_1+\cdots+a_rh_r=0$,这里$a_1,\cdots,a_r\in A$,那么$a_1,\cdots,a_r\in A_+$. 再仔细写出1.4.2节(d)⇒(b)中$u_{ikl}\in F[V^*]^G_+$的证明.

1.14 (Euler 公式) 设f是n个未定元$X_1,\cdots,X_n$的齐次多项式,证明

$$\sum_{k=1}^{n}X_k\frac{\partial f}{\partial X_k}=(\deg f)f.$$

1.15 设V是域F上的n维向量空间,G是$GL(V)$的有限子群. 假设G有一组基本不变式$f_1,\cdots,f_n$,$\deg f_i=d_i$,而$d_1\leqslant\cdots\leqslant d_n$. 证明$d_i$是$F[V^*]^G$中与$f_1,\cdots,f_{i-1}$代数无关的非常数齐次元的最低次数.

1.16 设V是特征0的域F上的n维向量空间,G是作用在V上的有限伪反射群,I是$F[V^*]^G_+$在$F[V^*]$中生成的理想.

(a) 证明$F[V^*]\cong F[V^*]^G\otimes_F(F[V^*]/I)$,$\otimes_F$表示在$F$上作张量积;

(b) 定义分次向量空间$F[V^*]/I$的 Poincaré 级数(实际是多项式)为

$$P(F[V^*]/I,t)=\sum_{d=0}^{\infty}\dim(F[V^*]/I)_dt^d.$$

证明

$$P(F[V^*],t)=P(F[V^*]^G,t)P(F[V^*]/I,t);$$

(c) 由(b)推出

$$P(F[V^*]/I,t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^{d_i}}{1-t}=\prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1}),$$

这里$d_1,\cdots,d_n$是G的次数;

(d) 由(c)推出,$F[V^*]_d\subseteq I$当且仅当$d>\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$.

(e) 设F是特征0的代数闭域,χ是G的一个不可约特征标,$a_i(\chi)$是χ在$(F[V^*]/I)_i$中出现的重数,再令

$$p_\chi(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\chi)t^i.$$

证明

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{\chi(\sigma)}{\det(1-\sigma t)}=p_\chi(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-t^{d_i})}.$$

1.17 设F是任意域,V是F上的n维向量空间,$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$和$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$V$的两组基,再设$x_1,\cdots,x_n$和$y_1,\cdots,y_n$分别是它们在$V^*$中的对偶基. 证

明

$$\left.\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{(c_1,\cdots c_n)} \neq 0 \quad 对任意\ ^t(c_1,\cdots,c_n) \in F^n.$$

1.18　设 F 是任意域，证明 F 上 n 个未定元 $X_1,\cdots,X_n$ 的 n 个初等对称多项式

$$\sigma_1 = X_1 + \cdots + X_n,$$
$$\sigma_2 = X_1X_2 + X_2X_3 + X_{n-1}X_n,$$
$$\cdots,$$
$$\sigma_n = X_1X_2\cdots X_n$$

在 F 上代数无关.

1.19　设 V 是域 F 上的 n 维向量空间，$f:V\times V\to F$ 是定义在 $V\times V$ 上，而在 F 中取值的函数. 如果 f 适合以下两条件：(i) $f(x,y)=f(y,x)$，$\forall\ x,y\in V$，(ii) $f(c_1x_1+c_2x_2,y)=c_1f(x_1,y)+c_2f(x_2,y)$，$\forall\ c_1,c_2\in F,x_1,x_2,y\in V$，$f$ 就叫做 V 上的对称双线性函数. f 叫做非退化的，如果从 $f(x,y)=0$，$\forall\ x\in V$ 推出 $y=0$.

(a) 设 f 是给定的 V 上的对称双线性函数. 对于任一 $y\in V$，定义一个将 V 映入 F 的函数 f_y：$f_y(x)=f(x,y)$，$\forall\ x\in V$. 证明：$f_y\in V^*$，从 V 映入 V^* 的映射 $y\to f_y$ 是向量空间的同态，而且如果 f 是非退化的，那么这个映射是从 V 到 V^* 的同构；

(b) 设 F 是无限域，而 f 是 V 上的对称双线性函数，令 $q(x)=f(x,x)$，则 $q\in F[V^*]_2$；

(c) 设 F 是特征 $\neq 2$ 的无限域，而 $q\in F[V^*]_2$，令 $f(x,y)=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$，则 f 是 V 上的对称双线性函数.

第二章 有限反射群的分类

本章主要介绍有限实反射群的分类,这是 Coxeter 1935的结果,在编写 Coxeter 的这一结果时,参考了 Witt 1941, Steinberg 1968a, Carter 1972, Bourbaki 1980和 Humphreys 1990等著作中的阐述. 2.1节中,把作用在有限维实向量空间上有限伪反射群的讨论化为作用在有限维欧氏空间上有限反射群的讨论. 为了讨论后一问题,在2.2节中引进了根系和基础根系. 有限反射群可以看作是 Coxeter 群这一结果,是2.3节的主要内容. 2.4节里介绍了有限反射群的基本域,并把它应用来讨论有限反射群. 2.5节引进了有限反射群的 Coxeter 图,并列举出可能作为不可约有限反射群的 Coxeter 图的那些 Coxeter 图. 2.6节讨论抛物子群,并应用它来证明某些不可约有限反射群的存在性可从另外的不可约有限反射群的存在性推出来. 2.7节完成了不可约有限反射群存在性的证明,从而完成了有限反射群的分类. 2.8节讨论晶体群、晶体根系和 Weyl 群.

§2.1 有限反射群

设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间,再设

$$(\,,\,):V\times V\to \mathbf{R}$$

是定义在 $V\times V$ 上而在 $\mathbf{R}$ 中取值的函数. 如果它满足以下性质:

(i)(对称性) $(\xi,\eta)=(\eta,\xi)$, $\forall\ \xi,\ \eta\in V$;

(ii)(双线性) $(a\xi+b\eta,\zeta)=a(\xi,\zeta)+b(\eta,\zeta)$, $\forall\ a,b\in\mathbf{R}$, $\xi,\eta,\zeta\in V$;

(iii)(定正性) $(\xi,\xi)\geqslant 0$, $\forall\ \xi\in V$;而 $(\xi,\xi)=0$ 当且仅当 $\xi=0$;

就说$(,)$是V上的一个内积，而V是n维欧氏空间. 注意(ii)只是说$(,)$对于第一个变量是线性的，但是由于(i)成立，可以推出$(,)$对于第二个变量也是线性的. 因此(ii)叫做双线性.

设V是n维欧氏空间而$\xi\in V$，$(\xi,\xi)^{1/2}$叫做ξ的长，(ξ,ξ)叫做ξ的长的平方或ξ的范数. 设$\xi,\eta\in V$，如果$(\xi,\eta)=0$，那么说ξ和η正交.

设$\mathbf{R}^n$是实数域$\mathbf{R}$上的n维列向量空间，$\xi={}^t(x_1,\cdots,x_n)$，$\eta={}^t(y_1,\cdots,y_n)$，定义$(\xi,\eta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$，不难证明，$(,)$是$\mathbf{R}^n$的一个内积，于是$\mathbf{R}^n$是$n$维欧氏空间. 令$\varepsilon_1={}^t(1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n={}^t(0,\cdots,0,1)$，显然有$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$.

一般地，设V是$\boldsymbol{R}$上的n维向量空间，再设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基. 设$\xi$和$\eta$是$V$中任意两个向量，可以把它们分别表示成$\xi=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$和$\eta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$，其中$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in\mathbf{R}$. 定义

$$(\xi,\eta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

那么不难证明$(,)$是V的一个内积，而V成为n维欧氏空间. 显然$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$. n维欧氏空间中的n个向量$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$叫做一组标准正交基，如果$(\lambda_i,\lambda_j)=\delta_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$. 当然对于$V$的另一组基$\eta_1,\cdots,\eta_n$，也可以像上面一样引进$V$的一个内积使$\eta_1,\cdots,\eta_n$成为对于后一内积的标准正交基. 注意，$V$的这两个内积不一定一样(习题2.1).

现在设V是n维欧氏空间，U和W是V的子空间. 如果对于任意$\xi\in U$和任意$\eta\in W$，都有$(\xi,\eta)=0$，那么就说U和W正交，并记$(U,W)=0$. 显然，如果U和W正交，那么$U\cap W=\{0\}$.

仍设V是n维欧氏空间，U是V的子空间，显然V的内积对于U的限制是U上的一个内积，因此U也是欧氏空间. 定义

$$U^{\perp}=\{\eta\in V\mid(\xi,\eta)=0,\forall\ \xi\in U\}.$$

不难验证：$U^{\perp}$也是V的子空间，因而也是欧氏空间；$(U,U^{\perp})=0$；$V=U\oplus U^{\perp}$，即V是子空间U和$U^{\perp}$的直和，因而$\dim U+\dim U^{\perp}=$

n;$(U^{\perp})^{\perp}=U$(习题2.2). 可以把$U^{\perp}$叫做U的正交补空间. 自然,U也是$U^{\perp}$的正交补空间. 因此也说子空间U和$U^{\perp}$互为正交补空间.

命题2.1 (a) $\mathbf{R}$上的任一n维向量空间中总可以定义内积,使它成为欧氏空间.

(b) n维欧氏空间中总存在标准正交基.

证 (a)在前面已经证明,现在来证明(b).

设V是n维欧氏空间,对n作归纳法来证明(b),先考察$n=1$的情形. 设ξ是V的一个非零向量. 令$\varepsilon_1=\frac{1}{(\xi,\xi)}\xi$,那么$(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=1$,因此$\varepsilon_1$就是$V$的一组标准正交基.

现在设$n>1$,仍设ξ是V的一个非零向量,并令$\varepsilon_1=\frac{1}{(\xi,\xi)}\xi$,把$\varepsilon_1$张成的1维子空间记作$U$,那么$U^{\perp}$是$n-1$维欧氏空间. 根据归纳法假设,$U^{\perp}$有一组标准正交基,设为$\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,那么$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$就是$V$的一组标准正交基. □

设V是n维欧氏空间,而$\sigma\in GL(V)$. 如果

$$(\sigma(\xi),\sigma(\eta))=(\xi,\eta),\quad \forall\,\xi,\eta\in V,$$

那么就说σ是V的正交变换. V的所有正交变换之集组成$GL(V)$的一个子群,叫做V上的正交群,记作$O(V)$. 如果$\xi_1,\cdots,\xi_n$是V的一组标准正交基,而$\sigma\in O(V)$,可设

$$\sigma(\xi_j)=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}\xi_i,\qquad j=1,\cdots,n.$$

那么不难验证$T=(t_{ij}),i,j=1,\cdots,n$,是正交矩阵,即${}^tTT=T{}^tT=I$,这里$I$是单位矩阵.

仍设V是n维欧氏空间,G是$O(V)$的子群,而U是V的子空间. 如果对任意$\sigma\in G$和任意$\xi\in U$,都有$\sigma(\xi)\in U$,就说U是G的不变子空间,简称子G-空间,特别,V也叫G-空间.

引理2.2　设 V 是 G-空间，U 是 V 的子 G-空间，那么 $U^{\perp}$ 也是子 G-空间，而且 $V=U\oplus U^{\perp}$.

证　设 $\xi\in U^{\perp}$，那么对任意 $\sigma\in G$ 和 $\eta\in U$，都有

$$(\sigma(\xi),\eta)=(\xi,\sigma^{-1}(\eta))=0,$$

因此 $\sigma(\xi)\in U^{\perp}$，所以 $U^{\perp}$ 也是子 G-空间.　□

设 V 是 n 维欧氏空间，G 是 $O(V)$ 的子群，而 U 是 V 的子 G-空间. 对任意 $\sigma\in G$，按下式来定义 U 上的线性变换 $\sigma|_U$，

$$\sigma|_U(u)=\sigma(u),\quad \forall\ u\in U,$$

把它叫做 σ 在 U 上的限制. 令

$$G|_U=\{\sigma|_U\,|\,\sigma\in G\},$$

显然映射

$$\begin{aligned}G&\longrightarrow G|_U,\\ \sigma&\longrightarrow \sigma|_U\end{aligned}$$

是同态，同态像是 $G|_U$，$G|_U$ 是 $O(U)$ 的子群. 把 $G|_U$ 叫做 G 在 U 上的限制.

设 V 是 n 维欧氏空间，G 是 $O(V)$ 的子群. 如果除了零空间和 V 本身以外，V 不再有其他 G-子空间，那么 V 就叫不可约 G-空间，G 叫 V 上的不可约群，简称不可约群；否则就说 V 是可约 G-空间，G 是 V 上的可约群，简称可约群. 如果 V 的子空间 U 是不可约 G-空间(或可约 G-空间)，就说 U 是 V 的不可约子 G-空间(或可约子 G-空间).

设 V 是 n 维欧氏空间，G 是 $O(V)$ 的子群，再设 V_1 和 V_2 都是 V 的子 G-空间. 如果映射 $\varphi: V_1\to V_2$ 是向量空间的同构，并且对任意 $\sigma\in G$ 和 $\xi_1\in V_1$ 都有 $\varphi((\sigma(\xi_1))=\sigma(\varphi(\xi_1))$，就说 φ 是 V_1 和 V_2 的 G-同构.

命题2.3　设 V 是 n 维欧氏空间，G 是 $O(V)$ 的子群，那么 V 可以分解成有限个两两正交的不可约子 G-空间的直和，更进一

步，设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r=U_1\oplus\cdots\oplus U_s$ 是 V 的两个这样的分解，那么 $r=s$，而且重排 $U_1,\cdots,U_r$ 之后，可以假定 V_i 和 U_i G-同构.

证 对 n 作归纳法来证明第一个断言. 如果 V 是不可约 G-空间，那么第一个断言自然成立. 如果 V 是可约 G-空间，那么 V 有子 G-空间 U，而 $U\neq\{0\}$，$U\neq V$. 根据引理2.2，$V=U\oplus U^{\perp}$，$U^{\perp}$ 也是 G-子空间. 因此 $\dim U<n$，$\dim U^{\perp}<n$. 根据归纳法假设，U 和 $U^{\perp}$ 都能分解成有限个两两正交的不可约子 G-空间的直和，把这两个直和分解式代入 $V=U\oplus U^{\perp}$，就得到 V 分解成有限个两两正交的不可约子 G-空间的直和分解.

第二个断言是 Jordan-Hölder 定理的直接推论. □

系理2.4 设 V 是 n 维欧氏空间，G 是 $O(V)$ 的子群，假定 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$，而 $V_1,\cdots,V_r$ 是 V 的两两正交的不可约子 G-空间. 令 G_i 表示 G 在 V_i 上的限制，$i=1,\cdots,r$. 那么 G_i 是 $O(V_i)$ 的子群，V_i 是不可约 G_i-空间，$G\cong G_1\times\cdots\times G_r$ 是群 G 分解成不可约群的直积分解，而 $\mathbf{R}[V^*]^G\cong\mathbf{R}[V_1^*]^{G_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{R}[V_r^*]^{G_r}$，其中 $\otimes$ 是 F-代数的张量积. 更进一步，除差一次序及同构外，$G_1,\cdots,G_r$ 由 G 唯一确定，而 $\mathbf{R}[V_1^*]^{G_1},\cdots,\mathbf{R}[V_r^*]^{G_r}$ 由 $\mathbf{R}[V^*]^G$ 唯一确定.

这个系理的证明只要机械地验证就行了，因此在此把它略去.

命题2.5 设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间，G 是 $GL(V)$ 的有限子群，那么可以在 V 中定义一个内积使 G 成为 $O(V)$ 的子群.

证 任选 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，对于任意 $\xi,\eta\in V$，设 $\xi=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ 和 $\eta=y_1e_1+\cdots+y_ne_n$，其中 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in\mathbf{R}$. 定义

$$(\xi,\eta)_1=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

那么 $(\,,\,)_1$ 是 V 上的一个内积. 再定义

$$(\xi,\eta)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}(\sigma(\xi),\sigma(\eta))_1,$$

不难证明,(,)也是 V 上的一个内积. 更进一步,对任意 $\sigma_1\in G,\xi,\eta\in V$,则有

$$\begin{aligned}(\sigma_1(\xi),\sigma_1(\eta))&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}(\sigma(\sigma_1(\xi)),\sigma(\sigma_1(\eta)))_1\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}((\sigma\,\sigma_1)(\xi),(\sigma\sigma_1)(\eta))_1\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}(\sigma(\xi)\ ,\sigma(\eta))_1\\&=(\xi,\eta).\end{aligned}$$

上式中第三个等号成立是因为对于一个固定的 $\sigma_1\in G$,当 σ 遍历 G 时,$\sigma\sigma_1$ 也遍历 G. 因此 G 中元素对于(,)来说都是正交变换,即 G 是 $O(V)$的子群. □

系理2.6 设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间,G 是 V 上的有限伪反射群,那么可以适当定义 V 的内积,使 G 成为 $O(V)$的子群.

命题2.7 设 V 是 n 维欧氏空间,而 $\sigma\in O(V)$. 假定 σ 是有限阶伪反射,那么可以在 V 中找到一个向量 α 使得

$$\sigma(\xi)=\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\quad\forall\ \xi\in V.\tag{2-1}$$

特别 $\sigma(\alpha)=-\alpha$,而 $\sigma(\eta)=\eta,\forall\ \eta\in\langle\alpha\rangle^\perp$. 除了差一个非零实数倍数以外,$\alpha$ 由 σ 唯一确定,或者说直线 $L_\alpha=\mathbf{R}\alpha$ 由 σ 唯一确定,超平面 $H_\alpha=\langle\alpha\rangle^\perp=(\mathbf{R}\alpha)^\perp$ 也由 σ 唯一确定.

证 令 $H=\{\eta\in V\mid\sigma(\eta)=\eta,\forall\ \sigma\in G\}$,即 H 是伪反射 σ 的反射超平面. 当然 H 是 σ 的不变子空间,而 $\dim H=n-1$. 故 $\dim H^\perp=1$,而根据引理2.2,$H^\perp$ 也是 σ 的不变子空间. 设 α 是 $H^\perp$ 中任一非零向量,不妨设 $\sigma(\alpha)=a\alpha,\alpha\in\mathbf{R}$. 因为 σ 是有限阶元,所以 $a=\pm1$. 因为 σ 是伪反射,所以 $a\neq1$,因此 $a=-1$. 按下式来定

义 V 上的线性变换 σ'：

$$\sigma'(\xi)=\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\forall\ \xi\in V.$$

显然 $\sigma'(\lambda)=\lambda,\forall\ \lambda\in H$ 和 $\sigma'(\alpha)=-\alpha$. 因为 $V=H\oplus\langle\alpha\rangle$，所以 $\sigma'=\sigma$. 因为 H 由 σ 唯一确定，所以 $H^{\perp}$ 也由 σ 唯一确定. 因为 α 是 $H^{\perp}$ 中的非零向量，所以除差一个非零实数倍数以外，α 也由 σ 唯一确定. □

上面命题说明，欧氏空间中的伪反射都是反射，而且可以表成(2-1)式的形状，它唯一确定一张超平面 H_α 和一条直线 $L_\alpha=\mathbf{R}\alpha$，它们互相正交. 反过来，它也被直线 L_α 或非零向量 α 所唯一确定，也被超平面 H_α 所唯一确定. 超平面 H_α 叫做这个反射的*反射超平面*，非零向量 α 叫做它的反射向量，这个反射常记作 s_α.

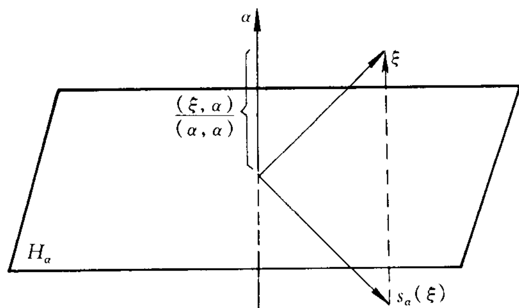


图2-1 欧氏空间中的反射

从命题2.5和命题2.7可以得出结论，$\mathbf{R}$ 上的有限伪反射群可以看成是欧氏空间中由反射生成的有限群. 它们叫做**有限反射群**，并用 W 来代表有限反射群；这是因为有限反射群主要是李群论里的 Weyl 群. 根据系理2.4，只要讨论欧氏空间中的不可约有限反射群就可以了.

这里举一些不可约有限反射群的例子.

例2.1 二面体群 $I_2(m)$，$m\geqslant 3$. 设 O-$P_1\cdots P_m$ 是欧氏平面上以 O 为中心而以 $P_1,\cdots,P_m$ 为顶点的正 m 边形，欧氏平面的正交变换，如果把这个正 m 边形变到它自己，就叫做这个正 m 边形的合同变换，这个正 m 边形的所有合同变换以映射的合成作为运算，组成一个群，叫做这个正 m 边形的合同变换群，记作 $I_2(m)$，有的数学书里把它记作 D_m，或 D_{2m}. 设 r 是欧氏平面上绕 O 转 $\frac{2\pi}{m}$ 弧度的角的旋转，那么 $r,\cdots,r^{m-1},r^m=1$ 是 $I_2(m)$ 中 m 个两两相异的元素，它们组成 $I_2(m)$ 的一个 m 阶循环子群. 当 m 是奇数时，设 s_1，$\cdots$，s_m 分别表示欧氏平面上对于线段 OP_1，$OP_{\frac{m+3}{2}}$，OP_2，$OP_{\frac{m+5}{2}}$，$\cdots$，$OP_{\frac{m+m}{2}}$ 所延长成的直线的反射. 当 m 是偶数时，把线段 P_iP_{i+1} 的中点记作 $M_i(1\leqslant i\leqslant m-1)$，线段 P_mP_1 的中点记作 M_m；设 s_1，$\cdots$，s_m 分别表示欧氏平面上对于线段 OP_1，OM_1，OP_2，OM_2，$\cdots$，$OP_{m/2}$，$OM_{m/2}$ 所延长成的直线的反射. 那么 $s_1,\cdots,s_m\in I_2(m)$. 不难证明

$$I_2(m)=\{r,\cdots,r^{m-1},r^m=1,s_1,s_2,\cdots,s_m\},$$

以及

$$r=s_1s_2=s_2s_3=\cdots=s_{m-1}s_m=s_ms_1.$$

因此 $|I_2(m)|=2m$，而且 $I_2(m)$ 由两个反射 s_1 和 s_2 生成，即

$$I_2(m)=\langle s_1,s_2\rangle,$$

而

$$s_1^2=s_2^2=(s_1s_2)^m=1.$$

不难证明 $I_2(m)$ 是不可约的（习题2.7）.

例2.2 A_n，$n\geqslant 1$. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$ 是 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一组标准正交基. 对 $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant n+1)$ 有 $\varepsilon_i-\varepsilon_j\neq 0$. 令

$$H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=\{\xi\in\mathbf{R}^{n+1}\mid(\xi,\varepsilon_i-\varepsilon_j)=0\},$$

那么 $H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超平面，而且显然有

$$H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=\{a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{n+1}\varepsilon_{n+1}\mid a_i\in\mathbf{R}\text{ 而 }a_i=a_j\}.$$

再令 $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ 表示以 $H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ 为反射超平面的反射，

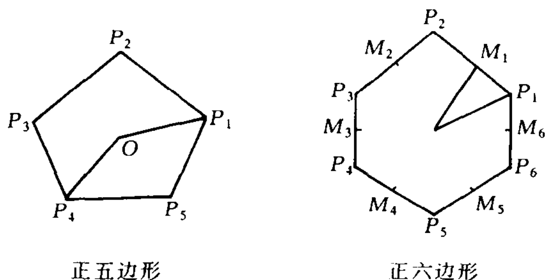


图2-2 欧氏平面上的正五边形和正六边形

$$A_n = \langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} | i,j = 1,\cdots,n+1 \text{ 而 } i \neq j \rangle.$$

考察 $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$上的作用. 显然,$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$把每个 $\varepsilon_k(k\neq i,j)$都保持不动,而交换 ε_i 和 ε_j. 因此 $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$就是作用在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$上的对换$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$,于是映射 $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}\to(i,j)(i,j=1,\cdots,n+1$而$i\neq j)$就导出群同构 $A_n\simeq S_{n+1}$,这里 S_{n+1}是 $n+1$个文字$1,\cdots,n+1$上的对称群,因此$|A_n|=(n+1)!$.

A_n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$中反射生成的有限群,因而是有限反射群,但它并不是 $\mathbf{R}^{n+1}$上的不可约群. 显然 $\mathbf{R}^{n+1}$中的向量 $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}$在 A_n 的每个元素的作用下都保持不动. 因此,由 $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}$张成的1维子空间$\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle$是 A_n 的不变子空间. 根据引理2.2$\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^\perp$也是 A_n 的不变子空间. 显然

$$\begin{aligned}&\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^\perp\\&=\{a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{n+1}\varepsilon_{n+1} | a_i\in\mathbf{R} \text{ 而 } a_1+\cdots+a_{n+1}=0\},\end{aligned}$$

而且不难验证,$\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^\perp$是不可约 A_n-子空间. 因此 A_n 是 n 维欧氏空间$\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^\perp$上的不可约有限反射群(习题2.8).

例2.3 $B_n,n\geqslant1$. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基. 和例2.2一样,令 $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}(1\leqslant i<j\leqslant n)$表示 $\mathbf{R}^n$ 中以超平面

$H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$为反射超平面的反射，它们生成一个与$S_{n-1}$同构的群. 令$s_{\varepsilon_i}$ $(i=1,\cdots,n)$表示把ε_i变到$-\varepsilon_i$，而把其余的$\varepsilon_j(j\neq i)$都保持不动的反射. 显然$s_{\varepsilon_1},\cdots,s_{\varepsilon_n}$生成的群$\langle s_{\varepsilon_i|i=1,\cdots,n}\rangle$是$2^n$阶的，它的元素在$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$上的作用只是改变某几个$\varepsilon_i$的符号，它与$n$个2阶群$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$的直积$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$同构，

$$\langle s_{\varepsilon_i}|i=1,\cdots,n\rangle\cap\langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle=\{1\},$$

而且$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}^{-1}s_{\varepsilon_k}s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$仍是某一个$s_{\varepsilon_l}$. 把由$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}(1\leqslant i<j\leqslant n)$和$s_{\varepsilon_i}(i=1,\cdots,n)$生成的群记作$B_n$，那么$B_n$就是一个半直积

$$B_n=\langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j},s_{\varepsilon_i}\rangle=\langle s_{\varepsilon_i}|i=1,\cdots,n\rangle\rtimes\langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle.$$

因此$|B_n|=2^n,n!$，显然B_n是不可约有限反射群.

例2.4　$D_n,n\geqslant 2$. 仍设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是$n$维欧氏空间$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基. 和上例一样，令$S_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}(1\leqslant i<j\leqslant n)$表示以超平面$H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$为反射超平面的反射. 再令$s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}(1\leqslant i<j\leqslant n)$表示以超平面$H_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}$为反射超平面的反射. 不难看出$s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}$把$\varepsilon_i$和$\varepsilon_j$分别变到$-\varepsilon_i$和$-\varepsilon_j$，而把其余的$\varepsilon_k(k\neq i,j)$都保持不动. 显然$s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}(1\leqslant i<j\leqslant n)$生成的群$\langle s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n)\rangle$中的元素在$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$上的作用只是改变偶数个$\varepsilon_i$的符号，而使其余的$\varepsilon_j$保持不动，$\langle s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle$是$2^{n-1}$阶的，

$$\langle s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle\cap\langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle=\{1\},$$

而且$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}^{-1}\,s_{\varepsilon_k+\varepsilon_l}\,s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$仍是某个$s_{\varepsilon_r+\varepsilon_s}$. 把由$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$和$s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}(1\leqslant i<j\leqslant n)$生成的群记作$D_n$，那么

$$D_n=\langle s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle\rtimes\langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}|1\leqslant i<j\leqslant n\rangle.$$

因此$|D_n|=2^{n-1}n!$. 显然，当$n\geqslant 3$时，D_n是不可约有限反射群，当$n=2$时，$\mathbf{R}^2$有两个D_2的不变子空间：$\langle\varepsilon_1+\varepsilon_2\rangle$和$\langle\varepsilon_1-\varepsilon_2\rangle$，而$\mathbf{R}^2=\langle\varepsilon_1+\varepsilon_2\rangle\oplus\langle\varepsilon_1-\varepsilon_2\rangle$，因此$D_2$是可约的.

§2.2　根系和基础根系

设W是作用在n维欧氏空间V上的有限反射群. 说W切实

地作用在 V 上，如果没有 $\xi\in V$ 而 $\xi\neq 0$，使 $\sigma(\xi)=\xi,\forall\ \sigma\in W$. 显然，如果 W 是作用在 V 上的不可约有限反射群，而 $\dim V\geqslant 2$，那么 W 切实地作用在 V 上.

设 W 是作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群. 令

$$V_1=\{\xi\in V\mid\sigma(\xi)=\xi,\forall\ \sigma\in W\},$$

那么 V_1是 W 的不变子空间. 根据引理2.2，$V_1^\perp$也是 W 的不变子空间，而且 $V=V_1\oplus V_1^\perp$. 令 $W|_{V_1}$和 $W|_{V_1^\perp}$分别表示 W 在 V_1和 $V_1^\perp$上的限制，那么 $W|_{V_1}=\{1\}$，$W\simeq W|_{V_1}^\perp$，而 $W|_{V_1^\perp}$切实地作用在 $V_1^\perp$上.

因此假设 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群切实地作用在 V 上，并不是多大的限制，今后将总作这一假设.

设 W 是作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群，并假定 W 切实地作用在 V 上. 设 s 是 W 中的一个反射，根据命题2.7，s 可表成(2-1)式的形状，其中 α 是个非零向量，直线 $L_\alpha=\mathbf{R}\alpha$ 和超平面 $H_\alpha=L_\alpha^\perp$都被 s 唯一确定. s 也记作 s_α.

引理2.8 设 α 是 V 中的非零向量，$\tau\in O(V)$，那么 $\tau s_\alpha\tau^{-1}=s_{\tau\alpha}$.

证 根据命题2.7，有

$$s_\alpha(\xi)=\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\quad\forall\ \xi\in V.$$

因此

$$\begin{aligned}(\tau s_\alpha\tau^{-1})(\xi)&=\tau(s_\alpha(\tau^{-1}(\xi)))=\tau\left(\tau^{-1}(\xi)-\frac{2(\tau^{-1}(\xi),\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\right)\\&=\xi-\frac{2(\xi,\tau(\alpha))}{(\tau(\alpha),\tau(\alpha))}\tau(\alpha)=s_{\tau\alpha}.\quad\square\end{aligned}$$

W 中的每个反射都可表成形状 s_α，它确定一条直线 $L_\alpha=\mathbf{R}\alpha$. 当 σ_α 遍历 W 中所有反射时，就得到直线 L_α 的一个集合. 引理2.8是说 W 中任一元素都把这个直线集变到自身. 如果能在这每一条直线上选一对长为1的向量，这样就得到一个向量集，记作 Φ. 显然

Φ 有以下性质：

(i) $\alpha\in\Phi\Rightarrow\Phi\cap\mathbf{R}\alpha=\{\alpha,-\alpha\}$；

(ii) $\alpha,\beta\in\Phi\Rightarrow\sigma_\beta(\alpha)\in\Phi$；

(iii) Φ 在 $\mathbf{R}$ 上线性地张成 V.

(i)是因为在每条直线 $L_\alpha=\mathbf{R}\alpha$ 上只选了一对长为1的向量，(ii)是引理2.8的推论，而(iii)是因为 W 切实地作用在 V 上. 以后将会看到，对 Φ 这种几何图形进行研究极大地有助于对有限反射群 W 的了解. 其实，并没有必要限定向量的长等于1，可以在每条直线上选一对等长的非零向量，而这些向量组成的向量集被 W 中任一元素都映到自己就可以了. 例如，欧氏平面上，把以(1,1)，(−1,1)，(−1，−1)，(1，−1)为顶点的正方形变到自己的正交变换组成的群里有四个反射，它们分别以 x_1轴，x_2轴，直线 $x_1-x_2=0$，$x_1+x_2=0$为反射直线，可以选

$$\pm(1,0),\ \pm(1,1),\ \pm(0,1),\ \pm(1,-1)$$

这八个向量组成 Φ，尽管这八个向量中有长为1的向量，也有长为 $\sqrt{2}$ 的向量，但这个 Φ 仍有上述性质(i)，(ii)，(iii).

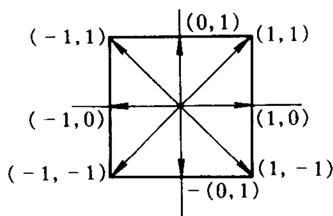


图2-3　根系 B_2

为了讨论起来比较灵活，不对向量的长作限制，而仅用(i)，(ii)，(iii)这三条性质来抽象地定义要讨论的几何图形，并把它叫做根系.

设 Φ 是 n 维欧氏空间 V 中非零向量的有限集，并假定它满足以下三条性质：

(R1)　$\alpha\in\Phi\Rightarrow\Phi\cap\mathbf{R}\alpha=\{\alpha,-\alpha\}$；

(R2)　$\alpha,\beta\in\Phi\Rightarrow\sigma_\beta(\alpha)\in\Phi$；

(R3)　Φ 在 $\mathbf{R}$ 上线性地张成 V；

Φ 就叫做 V 中的一个根系，而 Φ 中向量叫做根.

命题2.9　设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反

射群. 对于 W 中的任一反射 s,设 H 是它的反射超平面,在 $H^{\perp}$ 中选一对长为1的向量. 这样得到的 V 中非零向量的集合就是 V 中一个根系,记作 $\Phi(W)$. □

实际上,这个命题在前面的讨论中已经证明了.

对于 W 中任一反射,在它的反射超平面的正交补中选一对等长的非零向量. 如果这样得到的向量集是 V 中的一个根系,就把它叫做 W *的根系*,也记作 $\Phi(W)$. 命题2.9是说,切实地作用在 n 维欧氏空间上的有限反射群一定有根系,它里面的向量都是长为1的向量. 反过来,则有

命题2.10 设 V 是 n 维欧氏空间,Φ 是 V 中的一个根系,

$$W = W(\Phi) = \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi \rangle$$

是由所有反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 生成的 $O(V)$ 的子群,那么 W 是切实地作用在 V 上的有限反射群. 如果把 Φ 中每个向量 α 都用长为1的向量 $\frac{1}{(\alpha,\alpha)^{1/2}}\alpha$ 来代替,并把这样得到的向量集记作 Φ',那么 Φ' 也是 V 中根系,而 $W(\Phi')=W(\Phi)$. 更进一步,如果按照命题2.9,对 W 中的每个反射 s,都在它的反射超平面的正交补中选一对长为1的向量,这样得到的 W 的根系 $\Phi(W(\Phi'))\supset\Phi'$.

证 根据(R2),每个反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 都引起 Φ 的一个置换,因此每个 $w\in W$,也引起 Φ 的一个置换. 根据(R3),$w\in W$ 把每个根都保持不动,当且仅当 w 是单位映射,因此 W 可以看作 Φ 上的置换群. 因为 $|\Phi|<\infty$,所以 W 是有限群. 从(R3)还可以推出 W 切实地作用在 V 上.

第二个断言和第三个断言都很显然. □

设 V 是 n 维欧氏空间. 从切实地作用在 V 上的一个有限反射群出发,可以按照命题2.9定义它的根系 $\Phi(W)$. 再从 $\Phi(W)$ 出发,

又可以按命题2.10定义一个切实地作用在 V 上的有限反射群 $W(\Phi(W))$. 显然,

$$W(\Phi(W)) = W.$$

如果从 V 中一个根系 Φ 出发,可以假设 Φ 中向量的长都等于1,那么可以按命题2.10来定义一个切实作用在 V 上的有限反射群 $W(\Phi)$. 再从 $W(\Phi)$ 出发,又可以按照命题2.9定义它的根系 $\Phi(W(\Phi))$. 于是

$$\Phi(W(\Phi)) \supset \Phi.$$

在2.4节中将证明,上式中等号成立. 这样一来,从 V 中由长为1的向量组成的根系的集合到切实地作用在 V 上有限反射群的集合的映射

$$\Phi \to W(\Phi)$$

是双射,而以

$$W \to \Phi(W)$$

为逆映射. 因此讨论切实地作用在欧氏空间 V 上的有限反射群和讨论 V 中由长为1的向量组成的根系就是一回事.

先列举出上一节举出的那些不可约有限反射群的根系来.

例2.1(续1)　设 $m \geqslant 3$,那么

$$\begin{aligned}\Phi(I_2(m)) &= \{\pm(\cos\frac{k\pi}{m}, \sin\frac{k\pi}{m}) \mid k = 0, 1, \cdots, m-1\} \\ &= \{(\cos\frac{k\pi}{m}, \sin\frac{k\pi}{m}) \mid k = 0, 1, \cdots\cdots, 2m-1\}.\end{aligned}$$ □

例2.2(续1)　设 $n \geqslant 1$,那么

$$\Phi(A_n) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}.$$ □

例2.3(续1)　设 $n \geqslant 2$,那么

$$\Phi(B_n) = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

□

例2.4(续1) 设 $n\geqslant 3$,那么

$$\Phi(D_n)=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}.\qquad\square$$

从这些例子可以看出,根系这个集合和欧氏空间 V 的维数相比,太大了. 为此引进基础根系的概念. 先来定义实向量空间中的全序.

设 V 是实向量空间,V 上的关系 $<$ 叫做全序,如果它适合下面这几个性质:

(i) 对任意一对向量 $\lambda,\mu\in V$,下面三者之一且仅一成立:

$$\lambda<\mu,\lambda=\mu,\lambda>\mu;$$

(ii) 对任意 $\lambda,\mu,\gamma\in V$,$\lambda<\mu\Rightarrow\lambda+\gamma<\mu+\gamma$;

(iii) 对任意 $\lambda,\mu\in V$,$c\in\mathbf{R}$,$c>0$,$\lambda<\mu\Rightarrow c\lambda<c\mu$.

有时也把 $\lambda<\mu$ 写作 $\mu>\lambda$. $\lambda\leqslant\mu$ 是说 $\lambda<\mu$ 或 $\lambda=\mu$;$\lambda\geqslant\mu$ 是说 $\lambda>\mu$ 或 $\lambda=\mu$. 如果 $\lambda>0$,就说 λ 是正向量;如果 $\lambda<0$,就说 λ 是负向量.

不难定义 V 上的全序. 例如,任选 V 的一组基 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,并按字典次序来规定 $<$,即规定 $\sum a_i\lambda_i<\sum b_i\lambda_i$,当且仅当有 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 使 $a_1=b_1,\cdots,a_{k-1}=b_{k-1}$,而 $a_k<b_k$. 可以验证这是 V 上的全序.

设 Φ 是个根系,$\alpha\in\Phi$. 如果对于 V 的某个全序来说,$\alpha>0$,α 就叫做正根;而如果 $\alpha<0$,α 就叫做负根. Φ 的子集 Π 叫做正根系,如果对于 V 的某个全序来说,Π 由 Φ 中所有正根组成. 对于 V 的任一全序,Φ 都有一个正根系 Π. 令 $-\Pi=\{-\alpha\mid\alpha\in\Pi\}$,因为 Φ 的根成对 $\{\alpha,-\alpha\}$ 出现,$\Phi=\Pi\cup(-\Pi)$,$-\Pi$ 由 Φ 中所有负根组成,叫 Φ 的负根系.

仍设 Φ 是根系. Φ 的子集 Δ 叫做 Φ 的一组基础根系,如果 Δ 是 V 的一组基,而且任一 $\alpha\in\Phi$ 表成 Δ 中向量的线性组合时,它的系数或者全是 $\geqslant 0$ 的实数,或者全是 $\leqslant 0$ 的实数. 基础根系中的根叫基础根. Φ 的基础根系 Δ 中根的个数叫做 Φ 的秩,它等于 $\dim V$.

不可约有限反射群的根系的基础根系也叫这个不可约有限反射群的**基础根系**，而它里面根的个数也叫这个群的**秩**.

根系的基础根系的存在性并不显然. 然而对于前面列举的那几个不可约有限反射群的根系却不难举出它们各自的一个基础根系来. 用 $\Delta(I_2(m))$，$m\geqslant3$表示 $\Phi(I_2(m))$的一个基础根系等等，那么有

例2.1（续2）　$\Delta(I_2(m))=\{(1,0),(-\cos\frac{\pi}{m},\sin\frac{\pi}{m})\}$，$m\geqslant3$. 因此 $I_2(m)$的秩等于2. □

例2.2（续2）　$\Delta(A_n)=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}\}$，$n\geqslant1$. 因此 $A_n(n\geqslant1)$的秩等于 n. □

例2.3（续2）　$\Delta(B_n)=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\alpha_n=\varepsilon_n\}$，$n\geqslant2$，因此 $B_n(n\geqslant2)$的秩等于 n. □

例2.4（续2）　$\Delta(D_n)=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\alpha_n=\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n\}$，$n\geqslant3$. 因此 $D_n(n\geqslant3)$的秩等于 n. □

对于任一根系，基础根系也一定存在，这一结果包含在下面的命题之中.

命题2.11　(a) 设 Δ 是根系 Φ 的一组基础根系，那么 Φ 有唯一一个正根系 $\Pi\supset\Delta$；

(b) 设 Π 是根系 Φ 的正根系，那么 Π 包含唯一一个基础根系，因此基础根系一定存在.

证　(a) 先证存在性，把 Δ 作为 V 的基引进字典次序，那么由这个字典次序所确定的 Φ 的正根系 Π 一定包含 Δ. 再设 Π 是包含

Δ 的一个正根系，那么 Π 恰好是那些向量的集合，把它们表成 Δ 中向量的线性组合时，它的系数都是 $\geqslant 0$ 的实数，因此 Π 由 Δ 唯一确定.

(b) 先证唯一性. 设 Δ 是 Π 所含的一个基础根系. 设 $\alpha\in\Delta$，那么 α 不能写成 Π 中两个或两个以上根的线性组合而系数都 >0. 否则，设 $\alpha=\sum\limits_{\beta\in\Pi'}a_\beta\beta$，其中 Π' 是 Π 的子集，$|\Pi'|\geqslant 2$，而 $a_\beta>0$，$\forall\ \beta\in\Pi'$. 因为 Δ 是 Π 所含的基础根系，每个 $\beta\in\Pi'$ 都可以表成 $\beta=\sum\limits_i b_{\beta i}\alpha_i$，其中 $\alpha_i\in\Delta$ 而 $b_{\beta i}\geqslant 0$. 将每个 $\beta\in\Pi'$ 的表达式代入 α 的表达式，就得到

$$\alpha=\sum_{\beta\in\Pi'}a_\beta\sum_i b_{\beta i}\alpha_i=\sum_i\Big(\sum_{\beta\in\Pi'}a_\beta b_{\beta i}\Big)\alpha_i.$$

因 Δ 是基础根系，所以如果 $\alpha_i\neq\alpha$，则 $\sum\limits_{\beta\in\Pi'}a_\beta b_{\beta i}=0$，于是 $b_{\beta i}=0$. 那么 $\forall\ \beta\in\Pi'$，β 都是 α 的倍式，根据根系的性质(i)就推出 $\beta=\alpha$，这与 $|\Pi'|\geqslant 2$ 的假设相矛盾. 显然，如果 $\alpha\in\Pi$ 而 $\alpha\notin\Delta$，那么 α 可以表成 Δ 中(因而 Π 中)两个或两个以上根的线性组合而系数都 >0，因此 Δ 可以刻划为 Π 中那些根的集合，它们都不能表成 Π 中两个或两个以上根的线性组合而系数都 >0. 因此 Δ 由 Π 唯一确定.

再证存在性：选 Π 的一个元素个数尽可能小的子集 Δ，使得 Π 中的根都可以表成 Δ 中根的线性组合而系数都 $\geqslant 0$. 显然这样一个子集一定存在. 如果能够证明 Δ 线性无关，那么 Δ 就是含在 Π 中的基础根系. 先证明下面这个断言.

"设 $\alpha,\beta\in\Delta$ 而 $\alpha\neq\beta$，那么 $(\alpha,\beta)\leqslant 0$."

用反证法来证明. 假定 $(\alpha,\beta)>0$. 令 $c=\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$，那么 $c>0$. 因为 $s_\alpha(\beta)=\beta-c\alpha\in\Phi$，所以 $s_\alpha(\beta)\in\Pi$ 或 $-s_\alpha(\beta)\in\Pi$.

先设 $s_\alpha(\beta)\in\Pi$，那么可以把 $s_\alpha(\beta)$ 表成 $s_\alpha(\beta)=\sum\limits_{\gamma\in\Delta}c_\gamma\gamma$，而 $c_\gamma\geqslant 0$. 于是 $\beta-c\alpha=\sum\limits_{\gamma\in\Delta}c_\gamma\gamma$. 如果 $c_\beta<1$，那么 $(1-c_\beta)\beta=c\alpha+\sum\limits_{\gamma\neq\beta}c_\gamma\gamma$，即 β 可以表成 Δ 中其余的根的线性组合而系数都 $\geqslant 0$，因此 Π 中

的根都可以表成 $\Delta\backslash\{\beta\}$ 中根的线性组合而系数都 $\geqslant 0$，这与 $|\Delta|$ 极小的假设矛盾. 如果 $c_\beta\geqslant 1$，可得 $0=(c_\beta-1)\beta+c\alpha+\sum\limits_{\gamma\neq\beta}c_\gamma\gamma$. 根据全序的定义，一组正根的线性组合其系数都 $\geqslant 0$，而至少有一个系数 >1，不可能等于0，这也是一个矛盾，因此 $s_\alpha(\beta)\in\Pi$ 不能发生.

再设 $s_\alpha(\beta)\in-\Pi$，那么可以把 $s_\alpha(\beta)$ 表成 $s_\alpha(\beta)=\sum\limits_{\gamma\in\Delta}c_\gamma\gamma$，而 $c_\gamma\leqslant 0$. 于是 $\beta-c\alpha=\sum\limits_{\gamma\in\Delta}c_\gamma\gamma$. 如果 $c+c_\alpha>0$，则 $(c+c_\alpha)\alpha=\beta+\sum\limits_{\gamma\neq\alpha}(-c_\gamma)\gamma$，即 α 可以表成 Δ 中其余的根的线性组合而系数 $\geqslant 0$，这仍与 $|\Delta|$ 的极小性矛盾. 如果 $c+c_\alpha\leqslant 0$，可得 $0=\beta-(c+c_\alpha)\alpha-\sum\limits_{r\neq\alpha}c_\gamma\gamma$，这仍与全序的定义相矛盾. 这样上面那个断言就证明了.

现在回来证明命题2.11(b)的存在性部分，用反证法，设 Δ 线性相关，那么有线性关系 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta}a_\alpha\alpha=0$，而 a_α 不全为0. 根据全序的定义，一定有的 $a_\alpha>0$，也一定有的 $a_\alpha<0$. 把这个式子中负系数的项移到等式的另一侧去，得到 $\sum\limits_\beta b_\beta\beta=\sum\limits_\gamma c_\gamma\gamma$，而等式双方是对 Δ 的两个不相交的子集求和，$b_\beta>0$，$c_r>0$. 令 $\xi=\sum\limits_\beta b_\beta\beta$，那么根据全序的定义，$\xi>0$. 但是根据上面那个断言，

$$0\leqslant(\xi,\xi)=(\sum_\beta b_\beta\beta,\sum_\gamma c_\gamma\gamma)\leqslant 0.$$

因此 $\xi=0$，这是一个矛盾. □

在命题2.11的证明中实际证明了

系理2.12　设 Δ 是根系 Φ 的一组基础根系，那么对任意 α，$\beta\in\Delta$ 而 $\alpha\neq\beta$，都有 $(\alpha,\beta)\leqslant 0$. □

命题2.13　设 Δ 是包含在正根系 Π 里的基础根系，而 $\alpha\in\Delta$，

那么 $s_\alpha(\Pi\backslash\{\alpha\})=\Pi\backslash\{\alpha\}$.

证　设 $\beta\in\Pi$ 而 $\beta\neq\alpha$,将 β 表成 $\beta=\sum_{\gamma\in\Delta}c_\gamma\gamma$,其中所有的 $c_\gamma\geqslant 0$. 根据根系的性质(i),$\Phi\cap\mathbf{R}\alpha=\{\alpha,-\alpha\}$,所以一定有一个 $r\neq\alpha$ 而 $c_\gamma>0$. 将 s_α 作用到上式双方,得

$$s_\alpha(\beta)=\sum_{\gamma\in\Delta}c_\gamma\gamma-\frac{2(\sum_\gamma c_\gamma\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

$$=\sum_{\gamma\neq\alpha}c_\gamma\gamma+\left(c_\alpha-\frac{2(\sum_\gamma c_\gamma\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\right)\alpha.$$

将 $s_\alpha(\beta)$表成 Δ 中向量的线性组合时,非零系数都同号. 今 $c_\gamma>0$,所以 $s_\alpha(\beta)\in\Pi$. 如果 $s_\alpha(\beta)=\alpha$,那么 $\beta=s_\alpha(s_\alpha(\beta))=s_\alpha(\alpha)=-\alpha$,这是一个矛盾. 因此 $s_\alpha(\beta)\neq\alpha$,于是 $s_\alpha(\Pi\backslash\{\alpha\})=\Pi\backslash\{\alpha\}$.　□

命题2.14　设 Φ 是根系,W 是所有 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$生成的有限反射群. 再设 Π 和 Π'是 Φ 的两个正根系,那么有 $\sigma\in W$ 使 $\sigma(\Pi)=\Pi'$(这时说 Π 和 Π'在 W 作用下共轭). 同样,Φ 的任意两个基础根系在 W 的作用下也共轭.

证　令 $r=|\Pi\cap(-\Pi')|$. 对 r 作归纳来证明 Π 和 Π'在 W 作用下共轭. 当 $r=0$时,$\Pi=\Pi'$,Π 和 Π 当然在 W 作用下共轭. 设 $r>0$,显然 Π 所包含的唯一的基础根系不能全包含在 Π'中. 选 $\alpha\in\Pi$而 $\alpha\notin\Pi'$. 由命题2.13推出$|s_\alpha(\Pi)\cap(-\Pi')|=r-1$. 显然$s_\alpha\Pi$也是正根系. 根据归纳法假设,有 $w\in W$ 使 $w(s_\alpha(\Pi))=\Pi'$. 这证明了第一个断言.

第二个断言是命题2.11和第一个断言的直接推论.　□

§2.3　有限反射群看作 Coxeter 群

设 W 是由一组元素 S 生成的群,W 叫做 Coxeter *群*,如果 S 中的元素所适合的关系式都是以下形状的关系式

$$(ss')^{m(s,s')} = 1, \quad \forall\, s, s' \in S$$

的推论，这里 $m(s,s)=1, \forall\, s\in S, m(s,s')=m(s',s)\geqslant 2, \forall\, s,s'\in S$ 而 $s\neq s'$. 当 s 和 s' 没有以上形状的关系式时，则约定 $m(s,s')=\infty$. $|S|$ 叫做 Coxeter 群 W 的秩.

这一节的目的是证明有限反射群是 Coxeter 群. 这首先要在有限反射群中找一组适当的生成元.

设 Φ 是 n 维欧氏空间 V 中的根系，记 $W=W(\Phi)$ 为由所有反射 $\sigma_a(a\in\Phi)$ 生成的群. 定理2.10中证明了 W 是有限反射群，W 切实地作用在 V 上，如果假定 Φ 和 W 的根系 $\Phi(W)$ 中，向量的长度都等于1，那么 $\Phi(W)\supset\Phi$.

设 Δ 是 Φ 的一组基础根系，那么 $|\Delta|=n$. 反射 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 叫做基础反射，一共有 n 个基础反射. 要证明 W 由基础反射生成，先引进一个概念. 设 $\beta\in\Phi$，将 β 表成 Δ 中基础根的线性组合 $\beta=\sum\limits_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\alpha$，把 $\sum c_\alpha$ 叫做 β（对于 Δ）的高度，记作 $ht(\beta)$. 例如，当 $\beta\in\Delta$ 时，$ht(\beta)=1$.

定理2.15　设 Δ 是一组基础根系，那么 $W=W(\Phi)$ 由基础反射 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 生成.

证　用 W' 表 W 的由基础反射 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 生成的子群，只要能证明 $W'=W$ 就行了.

Φ 有唯一的一个包含 Δ 的正根系，把它记作 Π. 设 $\beta\in\Pi$，考察 $W'\beta\cap\Pi$. 因为 $\beta\in W'\beta\cap\Pi$，所以这是个由正根组成的非空集. 在它里面选一个高度最小的正根 γ，来证明 $\gamma\in\Delta$. 用反证法，设 $\gamma\notin\Delta$，对任意 $\alpha\in\Delta$，从 W' 的定义和命题2.13推出 $s_\alpha(\gamma)\in W'\beta\cap\Pi$，因此 $ht(\gamma)\leqslant ht(s_\alpha(\gamma))$. 但是 $s_\alpha(\gamma)=\gamma-\dfrac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$，所以 $(\gamma,\alpha)\leqslant 0$. 把 γ 表成 $\gamma=\sum\limits_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\alpha$，其中 $c_\alpha\geqslant 0, \forall\,\alpha\in\Delta$，那么

$$0 < (\gamma,\gamma) = \sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha(\gamma,\alpha) \leqslant 0.$$

这是一个矛盾，因此 $\gamma\in\Delta$，这就推出，$W'\beta\cap\Delta\neq\varnothing$. 于是 $\beta\in W'\Delta$，$\forall\ \beta\in\Pi$，即 $\Pi\subset W'\Delta$.

设 $s_\beta(\beta\in\Phi)$ 是 W 的任意一个生成元，因为 $s_\beta=s_{-\beta}$，所以不妨设 $\beta\in\Pi$. 根据上一段证明的结论，可以把 β 写作 $\beta=w\alpha$ 而 $w\in W'$，$\alpha\in\Delta$，从引理2.8推出 $s_\beta=ws_\alpha w^{-1}\in W'$，因此 $W=W'$. □

系理2.16　设 Δ 是一组基础根系，那么对任意 $\beta\in\Phi$ 都有 $w\in W$ 使 $\omega\beta\in\Delta$.

证　在定理2.15的证明过程中证明了，对于 $\beta\in\Pi$ 都有 $w\in W'$ 使 $w\beta\in\Delta$. 现在设 $\beta\in-\Pi$，那么 $-\beta\in\Pi$，于是有 $w\in W'$ 和 $\alpha\in\Delta$ 使 $w(-\beta)=\alpha$，即 $w\beta=-\alpha$，于是 $(s_\alpha w)(\beta)=\alpha$. □

基础反射 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 是所要找的 W 的一组适当的生成元，它们的个数等于 $\dim V$，因此相当地少. 这组生成元适合下面这些显然的关系式：

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)}=1,$$

这里 $m(\alpha,\beta)$ 是 $s_\alpha s_\beta$ 在 W 中的阶. 下面要证明 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 这组生成元加上这些显然的关系式完全确定了 W. 这需要更为细致地研究 W 中的元素表成基础反射的乘积这个问题.

设 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，那么 $s_{\alpha_1},\cdots,s_{\alpha_n}$ 就是 n 个基础反射. 根据定理2.15，W 的元素 w 都可以表成基础反射的乘积. 如果 $w\neq1$，定义 w（相对于 Δ）的长度 $l(w)$ 为最小的正整数 r，使得 w 可以表成 r 个基础反射的乘积，譬如 $w=s_1\cdots\cdots s_r$，其中每个 $s_i(i=1,\cdots,r)$ 都是某个 $s_{\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant n)$，而这样一个表示式就叫做 w 的一个既约表示式. 约定 $l(1)=0$.

W 上的长度函数 $l(w)$ 有下面这些简单性质：

$$\det w=(-1)^{l(w)},$$

由此推出 $l(ww')$ 和 $l(w)+l(w')$ 同为奇数或偶数. 特别，

$$l(s_\alpha w)=l(w)\pm1,\quad\forall\ \alpha\in\Delta.$$

如果 $w=s_1\cdots s_r$，那么 $w^{-1}=s_r\cdots s_1$；因此 $l(w^{-1})\leqslant l(w)$，于是

$$l(w^{-1}) = l(w).$$

再定义

$$n(w) = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|,$$

即 $n(w)$是有多少个正根被 w 映成负根的个数. 根据命题2.13，$n(s_\alpha)=1, \forall\ \alpha\in\Delta$；因此 $n(s_\alpha)=l(s_\alpha)$. 因为 $\Pi\cap w^{-1}(-\Pi)=w^{-1}(w\Pi\cap(-\Pi))=-w^{-1}(\Pi\cap w(-\Pi))$，所以

$$n(w^{-1}) = n(w).$$

引理2.17　设 $\alpha\in\Delta, w\in W$，那么

(a)　$w\alpha>0\Rightarrow n(ws_\alpha)=n(w)+1$；

(b)　$w\alpha<0\Rightarrow n(ws_\alpha)=n(w)-1$.

证　如果 $w\alpha>0$，那么 $\alpha\in\Pi\cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$. 根据命题2.13，$s_\alpha(\Pi\backslash\{\alpha\})=\Pi\backslash\{\alpha\}$，因此

$$\begin{aligned}\Pi \cap (ws_\alpha)^{-1}(-\Pi) &= \Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)\\ &= s_\alpha(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)) \cup \{\alpha\}.\end{aligned}$$

于是 $n(ws_\alpha)=n(w)+1$. 如果 $w\alpha<0$，那么 $\alpha\notin s_\alpha w^{-1}(-\Pi)$. 因此

$$\begin{aligned}\Pi \cap (ws_\alpha)^{-1}(-\Pi) &= \Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)\\ &= (\Pi\backslash\{\alpha\}) \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)\\ &= s_\alpha((\Pi\backslash\{\alpha\}) \cap w^{-1}(-\Pi))\\ &= s_\alpha(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))\backslash\{-\alpha\}.\end{aligned}$$

于是 $n(ws_\alpha)=n(w)-1$. □

在证明本节的主要结果之前，先来证明有限反射群适合所谓的取消条件和替换条件.

命题2.18(取消条件)　设 $w=s_1\cdots s_r\in W$，$s_1,\cdots,s_r$ 都是基础反射而且同一个 s_i 可以重复出现，并设 $n(w)<r$，那么有足码$1\leqslant$

$i<j\leqslant r$使

(a) $\alpha_i=(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j$;

(b) $s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_j=s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}$;

(c) $w=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_r$($\hat{s}_i$ 和 $\hat{s}_j$ 分别表示把 s_i 和 s_j 取消).

证 (a) 因为$n(w)<r$,所以有一个足码 $j(1\leqslant j\leqslant r)$使 $n(s_1\cdots s_j)=n(s_1\cdots s_{j-1})-1$. 根据引理2.17,$(s_1\cdots s_{j-1})(\alpha_j)<0$. 因为 $\alpha_j>0$,所以有一个足码 $i(1\leqslant i<j)$使$(s_{i+1}\cdots s_{j-1})(\alpha_j)>0$,而$(s_is_{i+1}\cdots s_{j-1})(\alpha_j)<0$. 将命题2.13应用到 s_i 上,得 $\alpha_i=(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j$.

(b) 记 $w'=s_{i+1}\cdots s_{j-1}$, 那么 $\alpha_i=w'(\alpha_j)$. 根据引理2.8, $w's_{\alpha_j}w'^{-1}=s_{w'(\alpha_j)}=s_{\alpha_i}$,这就是说

$$(s_{i+1}\cdots s_{j-1})s_j(s_{i+1}\cdots s_{j-1})^{-1}=s_i,$$

将上式双方右乘以 $s_{i+1}\cdots s_{j-1}$,就得到(b).

(c) 由(b)立即推出

$$\begin{aligned}w&=s_1\cdots s_r=s_1\cdots s_i(s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_j)s_{j+1}\cdots s_r\\&=s_1\cdots s_i(s_is_{i+1}\cdots s_{j-1})s_{j+1}\cdots s_r=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_r.\end{aligned}$$ □

从引理2.17和命题2.18可以推出

命题2.19 设 $w\in W$,那么 $l(w)=n(w)$.

证 设 $l(w)=r$ 而 $w=s_1\cdots s_r$. 那么 w 的这个表达式是从1开始经过逐次添加一个 s_i 而得. 这一共添加了 r 步,n 函数的值开始时等于0,根据引理2.17每一步 n 函数的值顶多增加1,因此 $n(w)\leqslant r$. 如果 $n(w)<r$,根据命题2.18,可将 w 表成 $r-2$个基础反射之积,这与 $l(w)=r$ 相矛盾. □

系理2.20 设 Δ 是基础根系,Π 是相应的正根系,而 $w\in W$,那么以下几个条件等价

(a) $w\Pi=\Pi$;

(b) $w\Delta=\Delta$;

(c) $n(w)=0$;

(d) $l(w)=0$;

(e) $w=1$. □

命题2.14是说 W 可迁地作用在 Φ 的基础根系(或正根系)上,而这个系理是说,W 在它们上面的作用是单可迁的.

系理2.21　设 Π 是正根系,那么

(a) 存在唯一一个元素 $w_0\in W$,使 $w_0(\Pi)=-\Pi$,这个 w_0 还有性质:$l(w_0)=n(w_0)=|\Pi|=\frac{1}{2}|\Phi|$ 达到最大值(因此 w_0 叫做 W 中相对于 Π 的*最长元素*),而且 $w_0^{-1}=w_0$.

(b) w_0 可以刻划成 W 中唯一的那个元素 w,它有性质 $l(ws_\alpha)<l(w)\ \forall\ \alpha\in\Delta$.

(c) 设 $w\in W$,那么有 $w'\in W$ 使 $w_0=ww'$,而 $l(w_0)=l(w)+l(w')$.

证　(a) 如果 Π 是正根系,那么 $-\Pi$ 也是正根系(当然是相对于 V 的另一个全序). 根据命题2.14和系理2.20,有唯一的 $w_0\in W$ 使 $w_0\Pi=-\Pi$. 根据命题2.19和 n 函数的定义,$l(w_0)=n(w_0)=|\Pi|=\frac{1}{2}|\Phi|$,所以它达到最大值. 由 $w_0\Pi=-\Pi$ 推出 $\Pi=w_0^{-1}(-\Pi)=-w_0^{-1}(\Pi)$,因此 $w_0^{-1}(\Pi)=-\Pi$;再根据 w_0 的唯一性,$w_0^{-1}=w_0$.

(b) 如果 w 是最长元素,那么显然有 $l(ws_\alpha)<l(w)$,$\forall\ \alpha\in\Delta$. 设 w 不是最长元素,根据(a)有 $\beta\in\Pi\cap w^{-1}\Pi$,因而有 $\alpha\in\Delta\cap w^{-1}\Pi$,根据引理2.17和命题2.19,$l(ws_\alpha)=l(w)+1>l(w)$.

(c) 设 $w=s_1s_2\cdots s_r$ 是 w 的一个既约表示,逐步用基础反射右乘 w,使每次增加的长度都是1,直到不可能为止. 根据(b),这样得到的元素就是 w_0,因此 $w_0=ww'$,而 $l(w_0)=l(w)+l(w')$. □

命题2.22(替换条件) 设 $w\in W$ 而 $w=s_1\cdots s_r$,其中 $s_1,\cdots,s_r$ 都是基础反射,同一个 s_i 可以重复出现,但是并不假定 w 的这个表示式既约. 再设 $s=s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 是一个基础反射. 如果 $l(ws)<l(w)$,那么总有一个足码 $i(1\leqslant i\leqslant r)$ 使 $ws=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots s_r$,于是 $w=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots s_rs$(这就是说用 s 这个因子替换了 s_i 这个因子). 特别,w 有一个以 s 结束的既约表示,当且仅当 $l(ws)<l(w)$.

证 由命题2.19和引理2.17可知,$l(ws)<l(w)$ 与 $w\alpha<0$ 等价. 对于 $ws=s_1\cdots s_rs$,$l(ws)<l(w)\leqslant r<r+1$. 重复命题2.18的证明,而在(a)中取 $j=r+1$,那么从(c)就得出结论 $ws=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots s_r$.

□

现在可以来证明本节开始的时候宣布的结果.

定理2.23 设 Δ 是根系 Φ 的一组基础根系,W 是由 $S=\{s_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 生成的有限反射群,那么 S 中的元素所适合的关系式都是下面这些关系式

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)}=1,\quad\forall\ \alpha,\beta\in\Delta \tag{2-2}$$

的推论,这里 $m(\alpha,\beta)$ 表示 $s_\alpha s_\beta$ 的阶,例如,$m(\alpha,\alpha)=1$.

证 对每个 $\alpha\in\Delta$ 引进符号 t_α,令 F 是由 $\{t_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 生成的自由群,再令 N 是由 $\{(t_\alpha t_\beta)^{m(\alpha,\beta)}|\alpha,\beta\in\Delta\}$ 生成的正规子群. 映射

$$f:t_\alpha\to s_\alpha,\forall\ \alpha\in\Delta$$

自然诱导出从 F 到 W 上的同态,将这个同态仍记作 f. 显然 N 包含在 f 的核里. 如果能够证明 f 的核正好是 N,本定理就证明了.

设 $t_1t_2\cdots t_r\in F$,这里每个 t_i 都是某个 $t_\alpha(\alpha\in\Delta)$,并假定

$$f(t_1t_2\cdots t_r)=s_1s_2\cdots s_r=1,$$

这里每个 s_i 都是相应的 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$. 要证明 $t_1t_2\cdots t_r\in N$. 因为 $\det s_\alpha=-1,\forall\ \alpha\in\Delta,r$ 一定是偶数,设 $r=2q$,对 q 作归纳法.

当 $q=1$ 时,$r=2$ 而 $s_1s_2=1$,因此 $s_1=s_2^{-1}=s_2$,于是 $t_1t_2=t_1^2\in N$,这就是要证明的.

设 $q\geqslant 2$，假定了

$$s_1s_2\cdots s_r = 1 \tag{2-3}$$

用 $s_rs_{r-1}\cdots s_{q+2}$右乘(2.3)式双方，得到

$$s_1s_2\cdots s_{q+1} = s_rs_{r-1}\cdots s_{q+2}.$$

显然上式右方的长度$\leqslant q-1$，因此上式左方不是既约表示式.根据命题2.18(b)，有足码 i,j 而$1\leqslant i<j\leqslant q+1$使

$$s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_j = s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}, \tag{2-4}$$

因此有

$$s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}s_js_{j-1}\cdots s_{i+2}s_{i+1} = 1, \tag{2-5}$$

于是

$$f(t_it_{i+1}\cdots t_{j-1}t_jt_{j-1}\cdots t_{i+2}t_{i+1}) = 1.$$

如果(2-5)式所含基础反射的个数$<r=2q$，那么根据归纳法假设，

$$t_it_{i+1}\cdots t_{j-1}t_jt_{j-1}\cdots t_{i+2}t_{i+1} \in N,$$

于是

$$t_it_{i+1}\cdots t_{j-1}N = t_{i+1}t_{i+2}\cdots t_{j-1}t_jN.$$

因此

$$\begin{aligned} t_1t_2\cdots t_rN &= t_1t_2\cdots t_{i-1}(t_it_{i+1}\cdots t_{j-1})t_jt_{j+1}\cdots t_rN \\ &= t_1t_2\cdots t_{i-1}(t_{i+1}t_{i+2}\cdots t_{j-1}t_j)t_jt_{j+1}\cdots t_rN \\ &= t_1t_2\cdots \hat{t}_i\cdots \hat{t}_j\cdots t_rN. \end{aligned}$$

那么

$$f(t_1t_2\cdots\hat{t}_i\cdots\hat{t}_j\cdots t_r) = f(t_1t_2\cdots t_r) = 1.$$

因为 $t_1t_2\cdots\hat{t}_i\cdots\hat{t}_j\cdots t_r$ 所含生成元 t_k 的个数$=r-2<r$，根据归纳法假设 $t_1t_2\cdots\hat{t}_i\cdots\hat{t}_j\cdots t_r\in N$，因此 $t_1t_2\cdots t_r\in N$.

如果(2-5)式所含基础反射的个数$=r=2q$，那么一定有 $i=1$，$j=q+1$，于是(2-4)式是

$$s_2\cdots s_{q+1} = s_1\cdots s_q. \tag{2-6}$$

将(2-3)式双方右乘以 s_1同时左乘以 s_1，得

$$s_2\cdots s_r s_1 = 1, \tag{2-7}$$

于是

$$f(t_2\cdots t_r t_1) = 1.$$

对于(2-7)式重复前面对(2-3)式的讨论,或者证出 $t_2\cdots t_r t_1 \in N$ 或者得出

$$s_3\cdots s_{q+2} = s_2\cdots s_{q+1}. \tag{2-8}$$

从 $t_2\cdots t_r t_1 \in N$ 推出 $t_1 t_2\cdots t_r \in N$. 如果(2-8)式成立,那么有

$$s_3(s_2\cdots s_{q+1})s_{q+2}\cdots s_4 = 1.$$

对于这个式子再重复前面对(2-3)式的讨论,或者证出 $t_3(t_2\cdots t_{q+1})t_{q+2}\cdots t_4 \in N$,或者得到

$$s_2\cdots s_{q+1} = s_3 s_2 s_3\cdots s_q. \tag{2-9}$$

如果 $t_3(t_2\cdots t_{q+1})t_{q+2}\cdots t_4 \in N$,那么 $t_2\cdots t_{q+1}N = t_3 t_4\cdots t_{q+2}N$,于是

$$t_1 t_2\cdots t_r N = t_1(t_2\cdots t_{q+1})t_{q+2}\cdots t_r N = t_1(t_3 t_4\cdots t_{q+2})t_{q+2}\cdots t_r N$$
$$= t_1\hat{t}_2 t_3\cdots\hat{t}_{q+2}\cdots t_r N,$$

因此

$$f(t_1\hat{t}_2 t_3\cdots\hat{t}_{q+2}\cdots t_r) = f(t_1 t_2\cdots t_r) = 1.$$

因为 $t_1\hat{t}_2 t_3\cdots\hat{t}_{q+2}\cdots t_r$ 所含生成元 t_k 的个数 $=r-2<r$,根据归纳法假设 $t_1\hat{t}_2 t_3\cdots\hat{t}_{q+2}\cdots t_r \in N$,因此 $t_1 t_2\cdots t_r \in N$. 如果(2-9)式成立,从(2-6)式和(2-9)式推出 $s_1=s_3$,因此 $t_1=t_3$. 类似地,再循环排列(2-3)式中的因子并重复上面的讨论,或者可以证出结论 $t_1 t_2\cdots t_r \in N$,或者得到 $s_3=s_4$ 和 $t_3=t_4$. 这样一步步地进行下去,或者某一步可以证出结论,或者最后得到 $s_1=s_3=\cdots=s_{2q-1}$ 和 $s_2=s_4=\cdots=s_{2q}$. 于是 $t_1=t_3=\cdots=t_{2q-1}$ 和 $t_2=t_4=\cdots=t_{2q}$. 在后一情形(2-3)式就是 $(s_1 s_2)^q=1$. 设 $s_1=s_\alpha, s_2=s_\beta, \alpha,\beta\in\Delta$,那么 $m(\alpha,\beta)\mid q$,于是 $t_1 t_2\cdots t_{2q}=(t_1 t_2)^q=(t_\alpha t_\beta)^q \in N$. □

根据命题2.14,根系 Φ 的任意两组基础根系在 W 的作用下共轭,所以 W 的基础反射 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 所适合的关系式(2-2)并不依

赖于基础根系的选择，而由 W 唯一确定，也即是由 Φ 唯一确定.

例2.1(续3)　$I_2(m)$，$m\geqslant 3$，由基础反射 s_1 和 s_2 生成，它们适合关系式

$$s_1^2 = s_2^2 = (s_1s_2)^m = 1,$$

而且 s_1 和 s_2 所适合的关系式都是上面这三个关系式的推论.　□

例2.2(续3)　A_n，$n\geqslant 1$，由基础反射 $s_1,\cdots,s_n$ 生成，它们适合关系式

$$s_1^2 = \cdots = s_n^2 = (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = \cdots = (s_{n-1}s_n)^2 = 1,$$

$$(s_is_j)^2 = 1 \ (1 \leqslant i < j-1 \leqslant n),$$

而 $s_1,\cdots,s_n$ 所适合的关系式都是上面这些关系式的推论.　□

例3(续3)　B_n，$n\geqslant 2$ 由基础反射 $s_1,\cdots,s_n$ 生成，它们适合关系式.

$$s_1^2 = \cdots = s_n^2 = (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = \cdots$$

$$= (s_{n-2}s_{n-1})^3 = (s_{n-1}s_n)^4 = 1,$$

$$(s_is_j)^2 = 1 \quad (1 \leqslant i < j-1 \leqslant n),$$

而 $s_1,\cdots,s_n$ 所适合的关系式都是上面这些关系式的推论.　□

例4(续3)　D_n，$n\geqslant 3$ 由基础反射 $s_1,\cdots,s_n$ 生成，它们适合关系式

$${}_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = 1,\ (s_1s_3)^2 = 1, \text{当 } n = 3 \text{ 时},$$

$$\left.\begin{aligned} &{}_1^2 = \cdots = s_n^2 = (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = \cdots = (s_{n-3}s_{n-2})^3 \\ &\qquad = (s_{n-2}s_{n-1})^3 = (s_{n-2}s_n)^3 = 1, \\ &s_is_j)^2 = 1 (1 \leqslant i < j-1 \leqslant n, \text{除 } i = n-2, j = n \text{ 这} \\ &\qquad \text{一情形}), (s_{n-1}s_n)^2 = 1, \end{aligned}\right\} \text{当 } n \geqslant 4 \text{ 时},$$

而 $s_1,\cdots,s_n$ 所适合的关系式都是上面这些关系式的推论.　□

§2.4 有限反射群的基本域

设 V 是 n 维欧氏空间,G 是 $O(V)$的有限子群,D 是 V 的闭集,如果对于任意 $\xi\in V$,都有唯一确定的一个向量 $\eta\in D$,使得 $\eta=\sigma(\xi)$,这里 $\sigma\in G$,那么 D 就叫 G 的基本域.

设 Φ 是 V 中的根系,而 $W=W(\Phi)$是由所有反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$生成的有限反射群.设 Δ 是 Φ 的一组基础根系,而 Π 是含 Δ 的正根系.对每个 $\alpha\in\Pi$,定义超平面 H_α 如下:

$$H_\alpha = \langle\alpha\rangle^\perp = \{\xi \in V \mid (\xi,\alpha) = 0\}.$$

那么 H_α 就是反射 s_α 的反射超平面,再定义两个开半空间 H_α^+ 和 H_α^-

$$H_\alpha^+ =\{\xi \in V \mid (\xi,\alpha) > 0\},$$
$$H_\alpha^- =\{\xi \in V \mid (\xi,\alpha) < 0\}.$$

显然 $V=H_\alpha^+\cup H_\alpha\cup H_\alpha^-$,它们两两的交是空集,而 $H_\alpha^-=-H_\alpha^+$.定义

$$C = \bigcap_{\alpha\in\Delta}H_\alpha^+ = \{\xi \in V \mid (\xi,\alpha) > 0,\forall\ \alpha \in \Delta\}, \quad (2\text{-}10)$$

显然有

$$C = \bigcap_{\alpha\in\Pi}H_\alpha^+ = \{\xi \in V \mid (\xi,\alpha) > 0,\forall\ \alpha \in \Pi\}.$$

因为每个 $H_\alpha^+(\alpha\in\Delta)$都是开凸集,$C$ 作为有限个开凸集的交也是开凸集.C 还是锥,即如果 $\lambda\in C$,则 $c\lambda\in C$ 对任意 $c\in\mathbf{R}$ 而 $c\geqslant 0$.令 $D=\bar{C}$,则 D 是闭半空间 $H_\alpha\cup H_\alpha^+(\alpha\in\Delta)$的交:

$$D = \{\xi \in V \mid (\xi,\alpha) \geqslant 0,\forall\ \alpha \in \Delta\}, \quad (2\text{-}11)$$

因此 D 是闭凸锥.更进一步,可以证明

命题2.24 D 是 W 的基本域.

证 在 V 中引进一个偏序,设 $\lambda,\mu\in V$,如果 $\lambda-\mu$ 表成 Δ 中向量的线性组合时,系数都$\geqslant 0$,就定义 $\lambda\geqslant\mu$.容易验证这是 V 中的一个偏序.对于任意 $\lambda\in V$,定义

$$\Lambda_\lambda = \{w\lambda \mid w \in W \text{ 而 } w\lambda \geqslant \lambda\}.$$

显然 $\lambda\in\Lambda_\lambda$，因此 $\Lambda_\lambda\neq\varphi$. 在 Λ_λ中选一个对于偏序$\geqslant$来说的极大元 μ. 有

$$s_\alpha(\mu)=\mu-\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\forall\ \alpha\in\Delta.$$

因为 μ 极大，所以 $s_\alpha(\mu)\not>\mu$，因此$(\mu,\alpha)\geqslant 0\ \forall\ \alpha\in\Delta$，即 $\mu\in D$.

再假定有 $\sigma,\sigma'\in W$ 使 $\sigma\lambda,\sigma'\lambda\in D$. 令 $\mu=\sigma\lambda$, $\mu'=\sigma'\lambda$, $w=\sigma'\sigma^{-1}$. 那么 $w\mu=\mu'$，而 $\mu,\mu'\in D$. 对 $l(w)=n(w)$作归纳来证明 $\mu=\mu'$. 如果 $l(w)=0$，那么 $w=1$，$\mu=\mu'$，如果 $n(w)>0$，那么 w 一定把一个基础根 α 变到负根去（否则，$w\Delta\subset\Pi$，于是 $w\Pi\subset\Pi$，那么从系理2.20推出 $w=1$，这与假设 $n(w)>0$相矛盾）. 因为 μ, $\mu'\in D$而 $w\alpha<0$，所以

$$0\geqslant(\mu',w\alpha)=(w\mu,w\alpha)=(\mu,\alpha)\geqslant 0.$$

因此$(\mu,\alpha)=0$，于是 $s_\alpha(\mu)=\mu$，$ws_\alpha(\mu)=\mu'$. 因为 $w\alpha<0$，根据引理2.17(b)，$n(ws_\alpha)=n(w)-1<n(w)$，所以由归纳法假设推出，$\mu=\mu'$. □

当 D 由(2-11)式定义时，D *叫做由基础根系 Δ 定义的基本域*.

引理2.25　设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间而 $\dim V\geqslant 1$，那么 V 不能是有限个真子空间的并.

证　当 $\dim V=1$时，$\{0\}$是唯一的真子空间，因此本引理成立. 再设 $\dim V=n\geqslant 2$，而本引理对于 $n-1$维向量空间成立. 假设 $V=V_1\cup\cdots\cup V_m$，其中 V_i 都是 V 的真子空间. 设 W 是 V 的任一 $n-1$维子空间，那么

$$W=W\cap V=(W\cap V_1)\cup\cdots\cup(W\cup V_m).$$

根据归纳假设，至少有一个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$使 $W\cap V_i=W$，那么 $W\subset V_i$. 因为 $\dim W=n-1$而 $\dim V_i\leqslant n-1$，所以 $W=V_i$. 因此 V 顶多有 m 个 $n-1$维子空间，但 V 有无穷多个 $n-1$维子空间. 这是一个

矛盾. □

命题2.26 设 Φ 是根系而 $W=W(\Phi)$ 是由所有反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 生成的有限反射群,那么 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 这些反射就是 W 中所有的反射.

证 设 s_r 是 W 中的一个反射,它的反射超平面 $H=\langle r\rangle^\perp$. 如果 $H=H_\alpha$ 对某个 $\alpha\in\Phi$,那么 $s_r=s_\alpha$ 而 $\alpha\in\Phi$. 再设 $H\neq H_\alpha,\forall\ \alpha\in\Phi$. 根据引理2.25,有 $\lambda\in H$ 而 $\lambda\notin H_\alpha,\forall\ \alpha\in\Phi$. 设 Δ 是 Φ 的一组基础根系,而 D 是由 Δ 定义的基本域,即 Δ 由(2-11)式所定义. 根据命题2.24,有唯一的 $\mu\in D$ 使 $\mu=w\lambda$,而 $w\in W$. 因为 w 在 Φ 上的作用是一个置换,所以 $\mu=w\lambda\notin H_\alpha,\forall\ \alpha\in\Phi$. 特别,$\mu\notin H_\alpha,\forall\ \alpha\in\Delta$,即 $(\mu,\alpha)\neq 0,\forall\ \alpha\in\Delta$. 但是 $\mu\in D$,所以 $(\mu,\alpha)>0,\forall\ \alpha\in\Delta$,即 $\mu\in C$,而 C 由(2-10)式所定义. 令 $s_{wr}=ws_rw^{-1}$,那么 s_{wr} 是 W 中的反射,它的反射超平面是 wH. 显然 $\mu\in wH$. 因 C 是开集,$\mu\in C$,有以 μ 为中心以 $\varepsilon>0$ 为半径的开球 $B\subset C$,因为 $\mu\in wH$,所以 $s_{wr}(\mu)=\mu$,又因为 s_{wr} 保持距离不变,所以 $s_{wr}(B)=B$. 显然 $B\not\subset wH$,那么有 $\nu\in B\backslash wH$,于是 $s_{wr}(\nu)\in B\subset C\subset D$,但是 $s_{wr}(\nu)\neq\nu$,这与 D 是基本域相矛盾. 因此 $H\neq H_\alpha,\forall\ \alpha\in\Phi$ 这一情形不能发生. 所以一定有 $s_r=s_\alpha$,对某个 $\alpha\in\Phi$. □

系理2.27 设 Φ 是 n 维欧氏空间 V 中的根系,如果假定 Φ 和 $W(\Phi)$ 的根系 $\Phi(W(\Phi))$ 中向量长度都等于1,那么 $\Phi(W(\Phi))=\Phi$. 因此从 V 中由长为1的向量组成的根系之集到切实地作用在 V 上的有限反射群之集的映射 $\Phi\to W(\Phi)$ 是双射,而以 $W\to\Phi(W)$ 为其逆映射. □

这样一来,2.2节中遗留的问题就解决了. 讨论切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群的分类和讨论 V 上根系的分类是等价的问题.

设 $\lambda\in V$，定义 $W_\lambda=\{w\in W\mid w\lambda=\lambda\}$，并把 W_λ 叫做 λ 在 W 中的稳定子群，再设 U 是 V 的子集，定义 $W_U=\{w\in W\mid w\lambda=\lambda,\forall\ \lambda\in U\}$.

命题2.28　(a)　设 $\lambda\in D$，那么 W_λ 由把 λ 保持不变的那些基础反射生成，特别，如果 $\lambda\in C$，则 $W_\lambda=\{1\}$.

(b)　设 $\lambda\in V$，那么 W_λ 由它所含的那些反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$生成.

(c)　设 U 是 V 的子集，那么 W_U 由它所含的那些反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$生成.

证　(a) 只要证明：如果 $w\in W$ 而 $w\lambda=\lambda$，那么可以把 w 表成使 λ 使持不变的一些基础反射的积. 证明和命题2.24的证明中的第二段基本一样，对 $n(w)$作归纳. 当 $n(w)=0$时，$w=1$，没有什么要证的. 设 $n(w)>0$，那么 w 一定把一个基础根 α 映成负根. 那么

$$0\geqslant(\lambda,w\alpha)=(w\lambda,w\alpha)=(\lambda,\alpha)\geqslant 0$$

因此$(\lambda,\alpha)=0$. 于是 $s_\alpha(\lambda)=\lambda$，所以 $ws_\alpha(\lambda)=\lambda$. 因为 $w\alpha<0$，根据引理2.17(b)，$n(ws_\alpha)=n(w)-1$，所以根据归纳法假设，可以把 ws_α 表成一些使 λ 不变的基础反射的积，因此 w 也一样.

如果 $\lambda\in C$，那么$(\lambda,\alpha)>0,\forall\ \alpha\in\Delta$. 因此没有基础反射 $s_\alpha(\alpha\in\Delta)$把 λ 保持不变，所以 $W_\lambda=\{1\}$.

(b) 设 $\lambda\in V$，根据命题2.24，有唯一的 $\mu\in D$ 使 $\mu=w\lambda$，而 $w\in W$，那么 $W_\lambda=w^{-1}W_\mu w$. 根据(a)，W_μ 由它所包含的基础反射生成. 根据引理2.8，基础反射的共轭是以根为反射向量的反射，所以 W_λ 由它所含的那些反射生成.

(c) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 U 的极大的一组线性无关向量，那么 U 中任一向量都是它们的线性组合，而 $W_U=W_{\lambda_1}\cap\cdots\cap W_{\lambda_t}$. 对 t 作归纳法来证明(c). 根据(b)，$t=1$情形成立. 设 $t>1$，根据(b)，W_{λ_1}由它所含的所有反射 s_α 生成. 令 $\Phi_1=\{\alpha\in\Phi\mid s_\alpha\in W_{\lambda_1}\}$，则 $\Phi_1\subset\Phi$，而如果 $\alpha\in\Phi_1$，则$-\alpha\in\Phi_1$. 引理2.8推出 W_{λ_1}中的任意元素都把 Φ_1中向量变到 Φ_1中向量. 设 V_1是由 Φ_1张成的子空间，那么 V_1就是 W_{λ_1}的不变子空间，W_{λ_1}在 $V_1^\perp$上的限制仅由单位映射组成，而 W_{λ_1}在 V_1

上的限制 $W_{\lambda_1}|_{V_1}$就是切实地作用在 V_1上的有限反射群,而以 Φ_1为根系. 为简单起见将 $W_{\lambda_1}|_{V_1}$ 仍记作 W_{λ_1}. 显然 $\lambda_1 \notin V_1$,令 $U' = \langle U \rangle \cap V_1$,而 $\lambda_2', \cdots, \lambda_s'$ 是 U'的一组基,那么 $s<t$ 而 $W_U = (W_{\lambda_1})_{U'} = (W_{\lambda_1})_{\lambda'_2} \cap \cdots \cap (W_{\lambda_1})_{\lambda'_s}$将归纳法假设应用到 W_{λ_1}上,就推出 W_U 由它所含的 W_{λ_1}中(也是 W 中)的所有反射生成. □

§2.5 有限反射群的分类

从定理2.23可以推出来,两个有限反射群同构当且仅当生成它们的基础反射的个数相同,而且它们的基础反射适合同样的关系式(2-2). 基础反射的个数就是有限反射群的秩,而关系式(2-2)则由 $m(\alpha,\beta)(\alpha,\beta\in\Delta)$这组整数完全确定. 因此有限反射群的秩和 $m(\alpha,\beta)$这组整数就是它的全部信息,它们完全确定了这个有限反射群,可以用图把它的这些全部信息表示出来.

设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群,Φ 是它的根系,Δ 是 Φ 的基础根系. Δ 中每个根都用平面上的一个小圆圈来代表,把它们叫做顶点(有时用它们代表的根的符号来标记它们). 两个顶点 α 和 β 有边相连,当且仅当 $m(\alpha,\beta)\geqslant 3$,而当它们有边相连时,就把这条边标上 $m(\alpha,\beta)$这个数. 当 $m(\alpha,\beta)=3$时,常常省去所标的3,这样得到一个标数图,叫做有限反射群 W 的 Coxeter 图,记作 $\Gamma(W)$.

因为有限反射群的 Coxeter 图包含了它的全部信息,所以两个有限反射群 W_1和 W_2同构当且仅当它们的 Coxeter 图 $\Gamma(W_1)$和 $\Gamma(W_2)$相同.

现在把 $I_2(m)(m\geqslant 3)$, $A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 2)$, $D_n(n\geqslant 3)$的 Coxeter 图画出来.

例2.1(续4) $\Gamma(I_2(m)), m\geqslant 3$: ○—$m$—○

例2.2(续4) $\Gamma(A_n), n\geqslant 1$: ○——○——○ --- ○——○——○

例2.3(续4)　$\Gamma(B_n), n\geqslant 2$:

例2.4(续4)　$\Gamma(D_3)$:

$\Gamma(D_n), n\geqslant 4$:

从上面这些例子里,可以看到 $I_2(3)$和 A_2的 Coxeter 图相同,A_3和 D_3的 Coxeter 图也相同,因此 $I_2(3)$和 A_2同构,A_3和 D_3也同构.

有限反射群之间的同构,不只是抽象群之间的同构,它还是所谓的几何同构.

命题2.29　设 W_1和 W_2分别是切实地作用在欧氏空间 V_1和 V_2上的有限反射群.如果 W_1和 W_2的 Coxeter 图相同,那么它们几何同构,即有一个从 W_1到 W_2的同构映射 φ和一个从 V_1到 V_2的保持内积的向量空间同构 ψ,具有性质

$$\varphi(w) = \psi \circ w \circ \psi^{-1},\ \forall\ w \in W. \tag{2-12}$$

特别,如果 $V_1=V_2$,那么 W_1和 W_2在 $O(V)$中共轭.

证　设 Δ_i 是 W_i 的基础根系($i=1,2$).根据基础根系的定义,它们分别是 V_i 的一组基.可设 Φ_i 中向量长都等于1.因为 $\Gamma(W_1)$和 $\Gamma(W_2)$相同,所以有一个从 Δ_1到 Δ_2的双射 ψ,使得对任意 $\alpha\in\Delta_1$,Coxeter 图中相应 α 的顶点也就是相应 $\psi(\alpha)$的顶点.自然可以把 ψ 线性扩充成从 V_1到 V_2的向量空间同构.设 α、$\beta\in\Delta_1$而 $\alpha\neq\beta$,那么 α 和 β 的夹角 $\theta=\pi-\pi/m(\alpha,\beta)$.于是 $(\alpha,\beta)=\cos\theta=-\cos(\pi/m(\alpha,\beta))$.同理 $(\psi(\alpha),\psi(\beta))=-(\cos\pi/m(\psi(\alpha),\psi(\beta)))$.因为 $m(\alpha,\beta)=m(\psi(\alpha),\psi(\beta))$,所以 $(\alpha,\beta)=(\psi(\alpha),\psi(\beta))$.因此 ψ 保持内积.再定义 $\psi(s_\alpha)=s_{\psi(\alpha)}$,$\forall\ \alpha\in\Delta_1$,那么 $\varphi: W_1\to W_2$是同构映射,而(2-12)式显然成立.　□

设 W 是切实作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群. 根据命题2.3,V 分解成有限个两两正交的不可约 W-子空间的直和,譬如,$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$,$V_i$ 都是不可约 W-子空间,而当 $i\neq j$ 时,$(V_i,V_j)=0$. 令 W_i 表示 W 在 V_i 上的限制,显然 W_i 是切实作用在 V_i 上的不可约有限反射群. 根据系理2.4,$W=W_1\times\cdots\times W_r$. 因此切实地作用在 V 上的有限反射群的研究就化成不可约有限反射群的研究. 如果不把仅含单位元的群看作有限反射群,那么 V 上的不可约有限反射群都切实地作用在 V 上,下面总作此约定.

有限反射群的不可约性怎样从它的根系或它的 Coxeter 图上反映出来呢?下面的命题回答了这个问题.

命题2.30 设 W 是切实作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群,Φ 是它的根系,Π 是它的一组基础根系,那么以下几个性质等价:

(a) W 是不可约的;

(b) Φ 不能分解成两个不相交的子集 Φ_1和 Φ_2的并,而$(\Phi_1,\Phi_2)=0$;这就是说$(\alpha,\beta)=0,\forall\ \alpha\in\Phi_1,\beta\in\Phi_2$;

(c) Δ 不能分解成两个不相交的子集 Δ_1和 Δ_2的并,而$(\Delta_1,\Delta_2)=0$;

(d) W 的 Coxeter 图 $\Gamma(W)$是连通的.

这个命题的证明留给读者(习题2.18).

如果根系 Φ(或基础根系 Δ)适合定理2.30中的(b)(或(c)),就说它是不可约的.

还可以定义一般的 Coxeter 图,设 Γ 是有有限个顶点的图,用 S 表它的顶点集,设 $\alpha,\beta\in S$. 如果有边相接 α 和 β,这个边上就标上一个$\geqslant3$的整数或∞,用 $m(\alpha,\beta)$来记所标的整数或∞,并假设 $m(\alpha,\beta)=m(\beta,\alpha)$. 这样 Γ 就叫做 Coxeter 图. 约定在 Coxeter 图中边上标的3这个数常常被省掉,如果 Coxeter 图中有两个顶点 α 和

β 没有边相连,就令 $m(\alpha,\beta)=m(\beta,\alpha)=2$.

问题是怎样把切实地作用在欧氏空间上的有限反射群的 Coxeter 图从一般 Coxeter 图中区别出来?

设 Γ 是个 Coxeter 图,S 是它的顶点集,$|S|=n$. 设 $\alpha,\beta\in S$,定义

$$a(\alpha,\beta)=-\cos\frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}.$$

造一个 $n\times n$ 矩阵 A,它的行和列的足码集都是 S,而它的 (α,β) 位置的元素是 $a(\alpha,\beta)$,即

$$A=(a(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in S}.$$

显然 A 是实对称矩阵,叫做 Coxeter 图 Γ 的 Coxeter 矩阵,而二次齐式 ${}^t xAx$,其中 $x={}^t(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,叫做 Coxeter 图 Γ 的二次齐式. 实对称矩阵 A 和二次齐式 ${}^t xAx$ 叫半定正的. 如果 ${}^t xAx\geqslant 0$, $\forall\ x\in\mathbf{R}^n$;而它们叫做定正的,如果它们是半定正的,而且 ${}^t xAx=0$ 当且仅当 $x=0$,如果 Coxeter 图 Γ 的 Coxeter 矩阵或它的二次齐式是定正的(或半定正的),就说 Γ 是定正的(或半定正的).

命题2.31　切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群 W 的 Coxeter 图 $\Gamma(W)$ 是定正的.

证　设 Φ 中向量长都等于1. 和定理2.29一样,$(\alpha,\beta)=-\cos\pi/m(\alpha,\beta)$,$\forall\ \alpha,\beta\in\Delta$,因此 $A=((\alpha,\beta))$. 设 x 是个 n 维实列向量,其分量 x_α 的足码集是 Δ,那么

$$\left(\sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha\alpha,\ \sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha,\alpha\right)={}^t xAx.$$

因为欧氏空间 V 中内积是定正的,所以 ${}^t xAx$ 也定正,即 $\Gamma(W)$ 定正. □

因此要寻找切实地作用在 n 维欧氏空间上的有限反射群的 Coxeter 图,只要在 n 个顶点的定正 Coxeter 图中去寻找就行了.

先列举一些定正 Coxeter 图.

定理2.32　下列连通的 Coxeter 图都是定正的.

这个命题的证明留给读者(习题2.19).在不致引起混淆时,也可用 A_n 代表图 $\Gamma(A_n)$,B_n 代表图 $\Gamma(B_n)$等等.

要证明定正的连通 Coxeter 图,只有命题2.32中所列举的那些.先来定义 Coxeter 图的子 Coxeter 图和子图的概念.

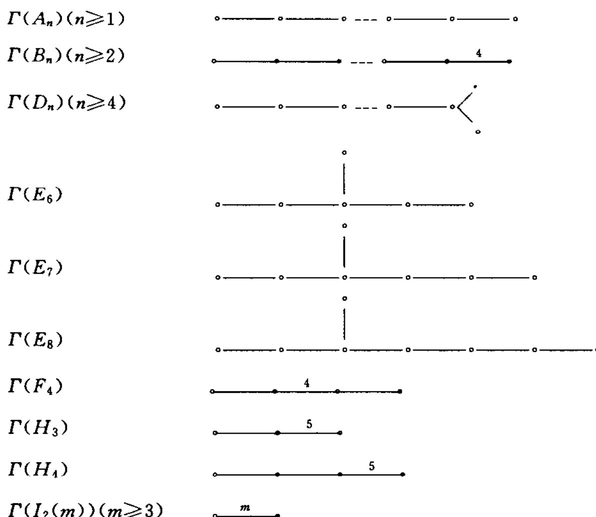


图2.4　连通定正 Coxeter 图

设 Γ 是个 Coxeter 图.略去 Γ 的某几个顶点和与这些顶点中任何一个相连的边,仍得到一个 Coxeter 图,叫做 Γ 的子图,设 Γ' 是 Γ 的子图,如果取消 Γ' 的某几条边(可以是0条边),并把另外几条边上标的数不变或减少成某些$\geqslant 3$的整数,这样得到的 Coxeter 图叫做 Γ 的子 Coxeter 图,显然 Coxeter 图的子图都是子 Coxeter 图.

引理2.33　设 Γ 是定正连通的 Coxeter 图,那么 Γ 的任一子 Coxeter 图都是定正的.

证　设 Γ' 是 Γ 的子 Coxeter 图，Γ 有 n 个顶点，Γ' 有 k 个顶点，那么 $k\leqslant n$. 设 A 和 A' 分别是 Γ 和 Γ' 相关的矩阵. 再设1，…，n 表示 Γ 的 n 个顶点，而1，…，k 表示 Γ' 的 k 个顶点，那么当 $1\leqslant i, j\leqslant k$ 时，$m(i,j)\geqslant m'(i,j)$，因此 $a(i,j)=-\cos(\pi/m(i,j))\leqslant -\cos(\pi/m'(i,j))=a'(i,j)$. 假定 A' 不定正，那么有非零向量 $x\in \mathbf{R}^k$ 使得 ${}^t xA'x=0$. 令 $y={}^t(|x_1|,\cdots,|x_k|,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^n$，那么

$$0\leqslant {}^t yAy=\sum_{i,j=1}^{k}a(i,j)|x_i||x_j|\leqslant\sum_{i,j=1}^{k}a'(i,j)|x_i||x_j|$$

$$\leqslant\sum_{i,j=1}^{k}a'(i,j)x_ix_j=0,$$

上式中最后一个不等式成立是因为 $a'(i,j)\leqslant 0, \forall\ i\neq j$. 因此上式中全都是等号. 第一个等号与 Γ 是定正的假设矛盾.　□

利用这条引理可以证明下面的定理.

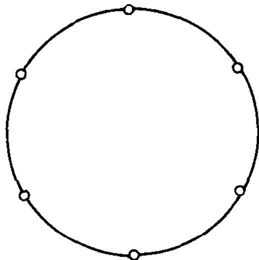
定理2.34　定正连通的 Coxeter 图只有定理2.32中所列出的那些.

证　这里只写出证明的主要步骤而把细节留给读者（习题2.20）.

设 Γ 是个定正连通 Coxeter 图，并假定 Γ 的顶点个数等于 n.

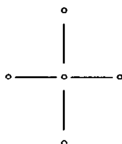
当 $n=1$ 时，Γ 只能是 $\Gamma(A_1)$. 当 $n=2$ 时，Γ 只能是 $\Gamma(I_2(m))$，$m\geqslant 3$，因此只要研究 $n\geqslant 3$ 的情形.

(1) 用引理2.33可以证明 Γ 不能包含下面形状的 Coxeter 图作为子 Coxeter 图.



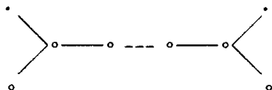
于是 Γ 也不能包含任何标数圈作为子 Coxeter 图.

(2) Γ 不能包含下面这个 Coxeter 图作为子 Coxeter 图.



因此 Γ 的每个顶点最多有三个顶点与它有边相连,即每个顶点最多分成三个叉.

(3) Γ 不能包含下面这种 Coxeter 图作为子 Coxeter 图.



因此 Γ 最多有一个分叉点.

现在分别讨论下面这两个情形.

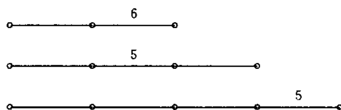
情形1 Γ 没有分叉点

(4) Γ 不能包含下面这种 Coxeter 图作为子 Coxeter 图.



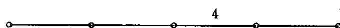
因此 Γ 最多有一条边标的正整数$\geqslant 4$. 如果 Γ 的边标的正整数都是3,那么 Γ 就是 $\Gamma(A_n)$, $n\geqslant 3$.

(5) Γ 不能包含下面这三个 Coxeter 图中的任何一个作为它的子 Coxeter 图.



因此 Γ 不可能含一条边标的正整数$\geqslant 6$. 如果 Γ 含一条边标的正整数是5,那么 Γ 只可能是 $\Gamma(H_3)$和 $\Gamma(H_4)$.

(6) Γ 不能含下面这个 Coxeter 图作为子 Coxeter 图.

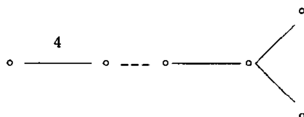


因此如果 Γ 含一条边标的正整数是4,那么 Γ 只能是 $\Gamma(F_4)$和

$\Gamma(B_n)$，$n\geqslant 3$.

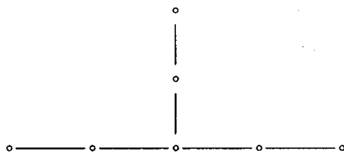
情形2　Γ 有一个分叉点，把从这个分叉点出发的三个枝的长度记作 a,b,c，并设 $a\leqslant b\leqslant c$.

(7) Γ 不能含下面这种 Coxeter 图作为它的子 Coxeter 图.



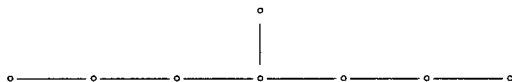
因此 Γ 中的边标的数都等于3.

(8) Γ 不能含下面这个 Coxeter 图作为它的子 Coxeter 图.



因此一定有 $a=1$.

(9) Γ 不能含下面这个 Coxeter 图作为它的子 Coxeter 图.



因此一定有 $b\leqslant 2$. 如果 $b=1$，Γ 就是 $\Gamma(D_n)$，$n\geqslant 4$.

(10) 再讨论 $b=2$的情形，Γ 不能含下面形状的 Coxeter 图作为子 Coxeter 图.



因此 $c=2,3$，或4，即 Γ 只能是 $\Gamma(E_6)$，$\Gamma(E_7)$，$\Gamma(E_8)$.

摆在面前的问题是，定理2.32中列出的那些定正连通的 Coxeter 图是不是都是不可约有限反射群的 Coxeter 图？对于 $\Gamma(I_2(m))(m\geqslant 3)$，$\Gamma(A_n)(n\geqslant 1)$，$\Gamma(B_n)(n\geqslant 2)$，$\Gamma(D_n)(n\geqslant 3)$，通过例2.1～2.4的讨论可以知道这是对的. 对于 $\Gamma(E_6)$，$\Gamma(E_7)$，

$\Gamma(E_8),\Gamma(F_4),\Gamma(H_3),\Gamma(H_4)$，这也是对的，证明将在2.7节中给出.

§2.6 抛物子群

设 Φ 是 n 维欧氏空间 V 中的根系，W 是由所有反射 $s_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 生成的 V 上的有限反射群，已经知道 W 切实地作用在 V 上. 再设 Δ 是 Φ 的一组基础根系，令 $S=\{s_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$ 是所有基础反射的集合，也已经知道 $W=\langle S\rangle=\langle s_\alpha\mid\alpha\in\Delta\rangle$. 设 I 是 S 的任一子集，令 $W_I=\langle I\rangle$；则 W_I 和它在 W 中的共轭子群 $wW_Iw^{-1}(w\in W)$ 都叫做 W 的**抛物子群**. 设 $w\in W$，那么 $w\Delta$ 也是 Φ 的一组基础根系，$wWw^{-1}=\{s_{w\alpha}\mid\alpha\in\Delta\}$，$wIw^{-1}\subset wSw^{-1}$，$wW_Iw^{-1}=\langle wIw^{-1}\rangle$. 特别，$W_\varnothing=\{1\}$ 和 $W_S=W$ 都是 W 的抛物子群. 根据命题2.24和命题2.28，设 λ 是 V 中任意非零向量，则 λ 在 W 中的稳定子群 W_λ 也是 W 的抛物子群.

命题2.35 设 Φ 是 n 维欧氏空间中的根系，Δ 是 Φ 的一组基础根系，$S=\{s_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$，再设 $I\subset S$，令 $\Delta_I=\{\alpha\in\Delta\mid s_\alpha\in I\}$，$V_I=\sum\limits_{\alpha\in\Delta_I}\mathbf{R}\alpha$，$\Phi_I=\Phi\cap V_I$.

(a) Φ_I 是 V_I 中的根系，以 Δ_I 为基础根系，V_I 是 W_I 的不变子空间，而 $w(x)=x,\forall\, w\in W_I,x\in V_I^{\perp}$，把 W_I 对 V_I 的限制仍记作 W_I，那么 $W_I\subset O(V_I)$是以 Δ_I 为基础根系的有限反射群.

(b) $l(w)=l_I(w),\forall\, w\in W_I$，这里 l_I 是 W_I 相对于基础根系 Δ_I 的长度函数.

(c) 定义 $W^I=\{w\in W\mid l(ws)>l(w),\forall\, s\in I\}$，那么对任意 $w\in W$，有唯一的 $u\in W^I$ 和唯一的 $v\in W_I$ 使 $w=uv,l(w)=l(u)+l(v)$，而且 u 是陪集 wW_I 中唯一的最短长度的元素.

证 (a) 对任意 $s_\alpha\in I$ 和 $\gamma\in\Delta_I$，$s_\alpha(\gamma)=r-\dfrac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in V_I$，因此

$s_\alpha(V_I)=V_I$，由此推出 $w(V_I)=V_I, \forall\ w\in W_I$. 设 $x\in V_I^\perp$，那么 $(x,\alpha)=0, \forall\ \alpha\in\Delta_I$，因此 $s_\alpha(x)=x$，由此推出 $w(x)=x, \forall\ w\in W_I$. 如果把 W_I 对 V_I 的限制仍记作 W_I，那么 $W_I\subset O(V_I)$，容易验证 Φ_I 满足 V_I 中根系的三条性质，因此 Φ_I 是 V_I 中的根系. Δ_I 是 Φ_I 的基础根系以及 W_I 是以 Φ_I 为根系的有限反射群这两点都是显然的.

(b) 在命题2.19中证明了 $l(w)=n(w)$. 因此只要能证明 $n(w)=n_I(w), \forall\ w\in W_I$ 就行了，这里 $n_I(w)$是 Φ_I 中有多少个正根被 w 映成负根的个数. 设 $\alpha\in\Phi^+\backslash\Phi_I$，那么将 α 表成 Δ 中向量的线性组合时，一定有一个基础根 $\gamma\notin\Delta I$ 的系数 $c_\gamma>0$，设 $\beta\in\Delta_I$，那么将 $s_\beta(\alpha)$表成 Δ 中向量的线性组合，γ 的系数仍是 c_γ，因此 $s_\beta(\alpha)$ 也是正根. 于是 $w\alpha\in\Phi^+, \forall\ w\in W_I$. 所以 Φ^+ 中的正根被 w 变成负根的都是 Φ_I 中的正根，这就是说 $n(w)=n_I(w)$.

(c) 对于给定的 $w\in W$，选陪集 wW_I 的代表元 u 为这个陪集中最短的一个元素，再把 w 写成 $w=uv, v\in W_I$. 因为 $us\in wW_I$，$\forall\ s\in I$，所以 $l(us)\geqslant l(u)$，于是 $l(us)>l(u)$，因此 $u\in W^I$. 设 $u=s_1\cdots s_p$ 和 $v=s_1'\cdots s_q'(s_i,s_j'\in S)$分别是 u 和 v 的既约表达式. 根据(b)可设 $s_1',\cdots,s_q'\in I$，那么 $l(w)\leqslant l(u)+l(v)=p+q$. 如果 $l(w)<p+q$，那么根据取消条件(命题2.18)可以在 uv 中取消两个 s_i 或 s_j' 而不改变 w. 从 u 中取消任何一个 s_i 等于说陪集 wW_I 中有比 u 短的元素，这与 u 的选取相矛盾. 如果从 v 中取消两个 s'_i, s'_j，与 $v=s_1'\cdots s_q'$ 是既约表达式的假设矛盾. 因此 $l(w)=l(u)+l(v)$.

假定 $u'\in W^I\cap wW_I$，而 $u'\neq u$. 根据上一段的讨论，可以把 u' 写成 $u'=uv, v\in W_I$，而 $l(u')=l(u)+l(v)$. 如果 $l(v)=r>0$，设 $v=s_1\cdots s_r(s_i\in I)$，那么 $l(u's_r)<l(u')$，这与 $u'\in W_I$ 矛盾. 因此 u 是唯一的最短长度的陪集代表元，于是 v 也是唯一的. □

命题2.35(c)中的陪集代表系 W^I 叫做极小陪集代表系.

系理2.36　设 Γ 是定理2.32中所列出的那些定正连通

Coxeter 图之一，并假设有有限反射群 W 以 Γ 为 Coxeter 图，那么对于 Γ 的任一子图 Γ'，也有有限反射群 W' 以 Γ' 为 Coxeter 图.

证　设 Φ 是 W 的根系，Δ 是 Φ 的一组基础根系，那么 $W=\langle s_\alpha | \alpha\in\Delta\rangle$. Δ 与 Γ 的顶点一一相应，那么与 Γ' 的顶点相应的基础根就组成 Δ 的一个子集 Δ'，令 $S=\{s_\alpha | \alpha\in\Delta\}$，$I=\{s_\alpha | \alpha\in\Delta'\}$，那么 $I\subset S$，$\Delta_I=\Delta'$. 根据命题2.35(a)，W_I 就是以 Δ_I 为基础根系的有限反射群. 显然 W_I 的 Coxeter 图就是 Γ'.　□

因为 $\Gamma(E_6)$ 和 $\Gamma(E_7)$ 都是 $\Gamma(E_8)$ 的子图，如果能够证明有不可约反射群以 $\Gamma(E_8)$ 为 Coxeter 图，那么也有有限反射群分别以 $\Gamma(E_6)$ 和 $\Gamma(E_7)$ 为其 Coxeter 图，更因为 $\Gamma(E_6)$ 和 $\Gamma(E_7)$ 都是连通的，所以这两个有限反射群都是不可约的. 同理，如果有不可约有限反射群以 $\Gamma(H_4)$ 为 Coxeter 图，那么也有不可约有限反射群以 $\Gamma(H_3)$ 为 Coxeter 图. 在下一节里，将给出群 F_4，E_8 和 H_4 存在的证明.

现在再回来讨论 W 的抛物子群，先叙述线性代数中的一条引理，而把它的证明留给读者(习题2.22).

引理2.37　设 V 是有限维欧氏空间，V_1 和 V_2 是 V 的子空间，那么 $(V_1\cap V_2)^\perp=V_1^\perp+V_2^\perp$.　□

命题2.38　从 $S=\{s_\alpha | \alpha\in\Delta\}$ 的子集 I 的集合到 W 的形如 $W_I=\langle s_\alpha | s_\alpha\in I\rangle$ 的抛物子群的集合上的映射

$$I \mapsto W_I \tag{2-13}$$

是从前者组成的格到后者组成的格的同构映射.

证　熟知，设 G 是群，G_1 和 G_2 是 G 的子群，则 $G_1\cap G_2$ 是 G 的子群，再定义 $G_1\cup G_2=\langle G_1, G_2\rangle$，那么 G 的所有子群的集合对于 $\cap$ 和 $\cup$ 组成一个格.

先证明映射(2.13)是格同态，即它保持格运算 $\cap$ 和 $\cup$，设 $I\to$

W_I，$J\mapsto W_J$. 显然 $W_{I\cup J}=\langle W_I,W_J\rangle=W_I\cup W_J$. 还需要证明，$W_{I\cap J}=W_I\cap W_J$. $W_{I\cap J}\subset W_I\cap W_J$ 是显然的. 在命题2.35中定义

$$\Delta_I=\{\alpha\in\Delta|s_\alpha\in I\},\ V_I=\sum_{\alpha\in\Delta_I}\mathbf{R}\alpha, \Phi_I=\Phi\cap V_I.$$

同样有

$$\Delta_J=\{\alpha\in\Delta|s_\alpha\in J\},\ V_J=\sum_{\alpha\in\Delta J}\mathbf{R}\alpha, \Phi_J=\Phi\cap V_J.$$

从这个定义立刻指出

$$V_I\cap V_J=V_{I\cap J}.$$

再根据引理2.37

$$V_I^\perp+V_J^\perp=(V_I\cap V_J)^\perp=(V_{I\cap J})^\perp.$$

设 $w\in W_I\cap W_J$，那么 w 就把 $V_I^\perp+V_J^\perp=(V_{I\cap J})^\perp$ 中每个向量都保持不变，根据命题2.28(c)，w 就是把这个空间中每个向量都保持不变的一些反射 s_α 的积，而这些 α 适合条件 $(\alpha,\lambda)=0,\forall\ \lambda\in(V_{I\cap J})^\perp$，于是 $\alpha\in V_{I\cap J}$，$\alpha\in\Phi_{I\cap J}=\Phi\cap V_{I\cap J}$. 所以 $w\in W_{I\cap J}$. 因此也有 $W_I\cap W_J\subset W_{I\cap J}$. 这证明了(2-13)式是格同态.

最后证明(2-13)式是单射，设 $I\mapsto W_I$，$J\mapsto W_J$，而 $W_I=W_J$，已经证明(2.13)式是格同态，所以 $W_{I\cap J}=W_I\cap W_J=W_I$. 如果 $I\neq J$，那么 $I\cap J\subsetneq I$，于是 $\Phi_{I\cap J}\subsetneq\Phi_I$，$W_{I\cap J}\subsetneq W_I$，矛盾. 因此 $I=J$. □

W 的抛物子群还可以刻画成 W 的所谓 Coxeter 复形中元素的稳定子群，这需要先定义 W 的 Coxeter 复形.

仍设 Φ 是 n 维欧氏空间中的根系，Δ 是 Φ 的一组基础根系，$S=\{s_\alpha|\alpha\in\Delta\}$，$W=\langle s_\alpha|s_\alpha\in S\rangle$. 再设 $I\subseteq S$，$\Delta_I=\{\alpha\in\Delta|s_\alpha\in I\}$在2.4节中定义了 W 的基本域 D 为

$$D=\{\lambda\in V|(\lambda,\alpha)\geqslant 0,\forall\ \alpha\in\Delta\},$$

也定义了

$$C=\{\lambda\in V|(\lambda,\alpha)>0,\forall\ \alpha\in\Delta\}.$$

现在对任意 $I\subseteq S$，定义

$$C_I = \{\lambda \in D \mid (\lambda,\alpha) = 0\ \forall\ \alpha \in \Delta_I, (\lambda,\alpha) > 0\ \forall\ \alpha \in \Delta\backslash\Delta_I\},$$

那么 C_I 是一些超平面 H_α 和一些开半空间 A_α 的交. 显然, $C_\varnothing = C$, $C_s = \{0\}$.

命题2.39 (a) 当 I 遍历 S 的所有子集时, C_I 这些集合构成 D 的一个划分, 而 C_I 张成的向量子空间的维数等于 $n - |I|$.

(b) 设 $\mu \in C_I$, 则 $W_\mu = W_I$.

(c) 当 I 遍历 S 的所有子集, 而 w 遍历 W 对于 W_I 的一组陪集完全代表系时, wC_I 这些集合构成 V 的一个划分.

证 (a)是显然的.

(b) 设 $\mu \in C_I$, 那么 $\mu \in D$. 根据命题2.28(a), $W_\mu = \langle s_\alpha \mid s_\alpha \in S$ 而 $s_\alpha(\mu) = \mu\rangle$. 如果 $s_\alpha \in I$, 即 $\alpha \in \Delta_I$, 那么根据 C_I 的定义, $s_\alpha(\mu) = \mu$, 于是 $s_\alpha \in W_\mu$. 如果 $s_\alpha \notin I$, 即 $\alpha \in \Delta\backslash\Delta_I$, 仍根据 C_I 的定义, $s_\alpha(\mu) \neq \mu$, 于是 $s_\alpha \notin W_\mu$, 因此 $W_I = \langle I \rangle = W_\mu$.

(c) 设 $\lambda \in V$. 根据命题2.24, 有 $w \in W$ 使 $w\lambda \in D$. 再根据(a), 有 $I \subseteq S$ 使 $w\lambda \in C_I$. 于是 $\lambda \in w^{-1}C_I$. 因此 V 是 $wC_I(w \in W, I \subseteq S)$ 这些集合的并. 再设 $wC_I \cap w'C_I' \neq \varnothing$, 即有 $\lambda \in V$ 使 $\lambda = w\mu = w'\mu'$, 这里 $\mu \in C_I$, $\mu' \in C_I'$, 那么 $w'^{-1}w\mu = \mu'$. 再根据命题2.24, $\mu = \mu'$, 因此 $C_I = C_I'$. 再根据(b), $w'^{-1}w \in W_\mu = W_I = W_\nu$ 对任一 $\nu \in C_I$. 于是 $w'^{-1}wC_I = C_I$, 因此 $wC_I = w'C_I$. □

当 I 遍历 S 的所有子集, 而 w 遍历 W 对于 W_I 的陪集的一组完全代表系时, wC_I 这些子集组成的集合叫做 W 的 Coxeter 复形, 记作 $\mathscr{C}$, 而 $\mathscr{C}$ 的元素 wC_I 叫做 I 型面.

命题2.40 设 I 是 S 的任一子集, 那么 $\mathscr{C}$ 中 I 型面 C_I 的稳定子群恰好是 W_I. 因此 W 的抛物子群都是 Coxeter 复形 $\mathscr{C}$ 中元素的稳定子群.

证 根据 C_I 的定义, 设 $\mu \in C_I$, 则 $w\mu = \mu$, $\forall\ w \in W_I$, 因此 $wC_I = C_I$. 再设 $w \in W$ 适合 $wC_I = C_I$, 因为 $C_I \subset D$, 根据命题2.24, w 把 C_I 中每个点都保持不动, 再根据命题2.28(a), $w \in W_\mu$. 在命

题2.29(b)中已经证明，$w_\mu = W_I$. 所以 C_I 的稳定子群是 W_I.

W 的任一抛物子群可表成形状 wW_Iw^{-1}，这里 $I\subseteq S$，$w\in W$. 上面已经证明 W_I 是 C_I 的稳定子群，因此 wW_Iw^{-1} 是 wC_I 的稳定子群. □

§2.7　$\mathbf{E}_6$，$\mathbf{E}_7$，$\mathbf{E}_8$，$\mathbf{F}_4$，$\mathbf{H}_3$，$\mathbf{H}_4$ 的存在性和它们的阶

在这一节里将要证明，确有不可约有限反射群，它们的 Coxeter 图分别是定理2.32中列出的 $\Gamma(E_6)$，$\Gamma(E_7)$，$\Gamma(E_8)$，$\Gamma(F_4)$，$\Gamma(H_3)$，$\Gamma(H_4)$. 根据系理2.36，只要证明确有不可约有限反射群，它们的 Coxeter 图分别是 $\Gamma(E_8)$，$\Gamma(F_4)$，$\Gamma(H_4)$.

先来构造不可约有限反射群 F_4，设 $V=\mathbf{R}^4$ 是4维欧氏空间，而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是它的一组标准正交基. 定义 V 中的一个向量集 Φ，它由下面这48个向量组成：

$$\left.\begin{aligned}&\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\quad(1\leqslant i<j\leqslant 4),\\&\pm\varepsilon_i(i=1,2,3,4),\ \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4),\end{aligned}\right\}\tag{2-14}$$

上面一行24个向量的长都等于 $\sqrt{2}$，下面一行24个向量的长都等于1. 可以证明 Φ 是 V 中的根系(习题2.23). 把上面一行的向量叫长根，而把下面一行的向量叫短根. 令

$$\begin{aligned}\Delta=\{&\alpha_1=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_3-\varepsilon_4,\alpha_3=\varepsilon_4,\\&\alpha_4=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\}.\end{aligned}\tag{2-15}$$

可以证明 Δ 是 Φ 的基础根系(习题2.23). 再令

$$W(\Phi)=\langle s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},s_{\alpha_3},s_{\alpha_4}\rangle.$$

计算

$$\begin{aligned}&(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=2,(\alpha_3,\alpha_3)=(\alpha_4,\alpha_4)=1,\\&(\alpha_1,\alpha_2)=-1,\ (\alpha_1,\alpha_3)=0,\ (\alpha_1,\alpha_4)=0,\\&(\alpha_2,\alpha_3)=-1,(\alpha_2,\alpha_4)=0,(\alpha_3,\alpha_4)=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

用 θ_{ij}表示 α_i 和 α_j 的夹角，那么$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi$. 利用公式

$$\cos\theta_{ij}=\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i,\alpha_i)}\sqrt{(\alpha_j,\alpha_j)}}.$$

可求出

$$\theta_{12}=\theta_{34}=\frac{2\pi}{3},\ \theta_{23}=\frac{3\pi}{4},$$

$$\theta_{13}=\theta_{14}=\theta_{24}=\frac{\pi}{2}.$$

又因为 $\theta_{ij}=\frac{2\pi}{m(i,j)}$，所以

$$m(1,2)=m(3,4)=3, m(2,3)=4,$$

$$m(1,3)=m(1,4)=m(2,4)=2.$$

因此有限反射群 $W(\Phi)$的 Coxeter 图正好是定理2. 32中列出的 $\Gamma(F_4)$. 因为 $\Gamma(F_4)$是连通的，所以 $W(\Phi)$是不可约的，则 $W(\Phi)$这个群记作 F_4.

再来讨论 $\Gamma(E_8)$，设 $V=\mathbf{R}^8$是8维欧氏空间，而 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_8$是它的一组标准正交基. 定义 V 中一个向量集 Φ，它由下面这240个向量组成：

$$\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j(i<j),\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\pm\varepsilon_i(\text{其中偶数个}+\text{号}),\tag{2-16}$$

可以证明，Φ 是 V 中的根系（习题2. 24），令

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_5-\varepsilon_6-\varepsilon_7+\varepsilon_8),$$

$$\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,$$

$$\alpha_i=\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_{i-2}(3\leqslant i\leqslant 8),$$

而

$$\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8\}.$$

可以证明 Δ 是 Φ 的基础根系（习题2. 24）. 再令

$$W(\Phi)=\langle S_{\alpha_i}\mid i=1,\cdots,8\rangle.\tag{2-17}$$

仿照 $\Gamma(F_4)$的情形可证,$W(\Phi)$的 Coxeter 图就是定理2.32中列出的 $\Gamma(E_8)$(习题2.24).

根据系理2.36,也有两个不可约有限反射群以 $\Gamma(E_6)$和 $\Gamma(E_7)$分别作为它们的 Coxeter 图,这两个不可约有限反射群分别记作 E_6和 E_7.

最后来讨论 $\Gamma(H_4)$. 定义一个从4维欧氏空间 $\mathbf{R}^4$到实四元数除法代数 $\mathbf{H}$ 上的一个双射

$$(a_1,a_2,a_3,a_4) \mapsto \lambda = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k. \tag{2-18}$$

把 $\mathbf{H}$ 看作实4维空间,这还是个向量空间的同构. 令 $\bar{\lambda}=a_1-a_2 i-a_3 j-a_4 k$. 设 $\lambda,\mu\in H$,定义

$$(\lambda,\mu) = \frac{1}{2}(\lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\lambda}).$$

可以证明这是 $\mathbf{H}$ 上的一个内积. 如果按下式来定义 $\mathbf{R}^4$上的内积:

$$((a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4)) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4,$$

那么双射(2-18)式还保持内积. 设 $\lambda\in\mathbf{H}$,再定义 λ 的范数为

$$\|\lambda\| = (\lambda,\lambda) = \lambda\bar{\lambda}.$$

那么当 $\lambda\neq 0$时,

$$\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{\|\lambda\|}.$$

设 α 是 $\mathbf{H}$ 中范数等于1的元素,用 s_α 表示 α 所确定的 $\mathbf{H}$ 中的反射

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$

那么有

引理2.41 设 $\alpha\in H$ 而$\|\alpha\|=1$,那么

$$s_\alpha(\lambda) = -\alpha\bar{\lambda}\alpha,\ \forall\ \lambda \in \mathbf{H}.$$

证 计算

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \lambda - 2(\frac{1}{2}(\lambda\bar{\alpha} + \alpha\bar{\lambda}))\alpha = -\alpha\bar{\lambda}\alpha. \qquad \square$$

用 $\mathbf{H}^*$表示 $\mathbf{H}$ 中非零元素组成的乘法群.

引理2.42 设 G 是 $\mathbf{H}^*$ 的偶阶有限子群，而 G 线性地张成 $\mathbf{H}$，那么 G 是 $\mathbf{H}$ 上的根系.

证 设 $\lambda\in G$，那么 $\lambda^r=1$ 对某个正整数 r，于是 $\|\lambda\|^r=1$，因此 $\|\lambda\|=1$，$\bar{\lambda}=\lambda^{-1}\in G$. 如果 $\lambda^2=1$，那么 $\lambda=\lambda^{-1}$，因此 $\lambda=\bar{\lambda}$，于是只有 -1 这一个四元数的阶等于2. 因为每个偶阶群都有2阶元，所以 $-1\in G$. 因此，如果 $\alpha\in G$，那么 $-\alpha\in G$. 又因为 G 中元素的范数都等于1，所以 G 适合根系的性质(R1). 设 $\alpha,\lambda\in G$，那么 $s_\alpha(\lambda)=-\alpha\bar{\lambda}\alpha\in G$，这就是说 G 也适合(R2). 因假定了 G 线性地张成 $\mathbf{H}$，所以 G 也适合(R3)，因此 G 是 $\mathbf{H}$ 上的根系. □

因为标数图 $\Gamma(H_4)$ 中有一条边标的数是5，如果有有限反射群以 $\Gamma(H_4)$ 为 Coxeter 图，那么这个群一定有两个基础反射，它们的积是5阶的，因而确定这两个基础反射的基础根的夹角是 $\frac{\pi}{5}$ 弧度的角. 这建议引进

$$a=\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad b=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

不难验证

$$2a=2b+1,4a^2=2a+1,4b^2=-2b+1.$$

利用这三个式子可以证明 $a+\frac{1}{2}i+bj$ 是范数等于1的四元数. 设 Φ 是由 $1,\frac{1}{2}(1+i+j+k),a+\frac{1}{2}i+bj$ 这三个范数等于1的四元数经坐标的偶置换和改变任意个坐标的符号而得到的四元数集合. 那么 Φ 中四元数的范数都等于1. 可以机械地验证 Φ 是120阶群(习题2.25). 因此根据引理2.42，Φ 是 $\mathbf{H}$ 中的根系. 不难证明 Φ 不可约. 令 $W(\Phi)=\langle s_\alpha|\alpha\in\Phi\rangle$. 根据定理2.34，$W(\Phi)$的 Coxeter 图只可能是 $\Gamma(A_n)$，$\Gamma(B_4)$，$\Gamma(D_4)$和 $\Gamma(H_4)$之一. A_n,B_n,D_n 的根的个数分别等于20，32，24，而 $|\Phi|=120$，因此 $W(\Phi)$的 Coxeter 图非是 $\Gamma(H_4)$不可. 把这个有限反射群记作 H_4. 当然也可以证明

$$\alpha_1 = a - \frac{1}{2}i + bj, \quad \alpha_2 = -a + \frac{1}{2}i + bj,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} + bj - aj, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2} - ai + bk \qquad (2\text{-}19)$$

是Φ的一组基础根系，再和F_4的情形一样去证明$W(\Phi)$的Coxeter图是$\Gamma(H_4)$.

仍根据系理2.36，也有不可约有限反射群以$\Gamma(H_3)$作为它的Coxeter图. 把这个群记作$\boldsymbol{H}_3$.

在2.1节中例2.1～例2.4里，已经算出了不可约有限反射群$I_2(m)(m\geqslant 3)$，$A_n(n\geqslant 1)$，$B_n(n\geqslant 2)$，$D_n(n\geqslant 3)$的阶. 但还要计算E_6，E_7，E_8，F_4，H_3，H_4的阶. 这需要做些准备.

引理2.43　设G是作用在有限集X上的置换群，而$x\in X$. 令$Gx=\{\sigma\cdot x\mid\sigma\in G\}$，即$Gx$是$x$的$G$-轨道，再令$G_x=\{\sigma\in G\mid\sigma\cdot x=x\}$是$x$在$G$中的稳定子群，那么$|G|=|Gx|\,|G_x|$　□.

这个引理的证明留给读者(习题2.27).

设W是个不可约有限反射群. 根据命题2.10，W可以看作是作用在它的根系Φ上的置换群. 如果能够选一个落在W的基本域D里的根α，根据命题2.28，α在W中的稳定子群W_α由把α保持不变的基础反射生成，只要在每个具体情形算出α的W-轨道长和W_α的阶，那么根据引理2.43，$|W|$就等于这两个数的积.

下面这个引理有助于确定不可约根系Φ在W的作用下，分成怎样一些W-轨道.

引理2.44　(a) 如果m是奇数，$I_2(m)(m\geqslant 3)$的根系$\Phi(I_2(m))$是一条$I_2(m)$-轨道；如果m是偶数，就分成两条$I_2(m)$-轨道.

(b) 设Φ是不可约根系，Δ是它的一个基础根系，$\alpha,\beta\in\Delta$，

$(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$. 如果在有限反射群 $W=\langle s_\alpha \mid \alpha\in\Delta\rangle$ 的 Coxeter 图 $\Gamma(W)$ 中,相应 α 和 β 的顶点有边相连,而边上标的数是3或5,那么 α 和 β 属于同一条 W-轨道.

这个引理的证明也留给读者(习题2.28).

现在用上面介绍的方法来计算 F_4的阶. 沿用前面关于 F_4的存在性的证明中的记号和结论. 已经列出了 F_4的根系 $\Phi(F_4)$(见(2-14)),它由24个长为 $\sqrt{2}$ 的根和24个长为1的根组成,也列出了 $\Phi(F_4)$的一组基础根系 $\Delta(F_4)$(见(2-15)). 可以验证,$\Phi(F_4)$的根 $\tilde{\alpha}=\varepsilon_1+\varepsilon_2\in D$,它的长等于 $\sqrt{2}$. 因为 F_4中的元素都是正交变换,所以不改变根的长,因此 $\tilde{\alpha}$ 的 F_4-轨道中的根的长都等于 $\sqrt{2}$. 根据系理2.16,任一长为 $\sqrt{2}$ 的根都可以用 F_4中的元素把它变到 $\Delta(F_4)$中去,而根据引理2.44,$\Delta(F_4)$中两个长为 $\sqrt{2}$ 的根 $\alpha_1=\varepsilon_2-\varepsilon_3$和 $\alpha_2=\varepsilon_3-\varepsilon_4$属于同一条 F_4-轨道. 因此 $\Phi(F_4)$中24个长根组成一个 F_4-轨道,即 $\tilde{\alpha}$ 的 F_4-轨道的轨道长等于24. 另一方面,$(\tilde{\alpha},\alpha_1)\neq 0$,$(\tilde{\alpha},\alpha_2)=(\tilde{\alpha},\alpha_3)=(\tilde{\alpha},\alpha_4)=0$. 因此 $(F_4)_{\tilde{\alpha}}=\langle s_{\alpha_2},s_{\alpha_3},s_{\alpha_4}\rangle$. 于是 $(F_4)_{\tilde{\alpha}}$ 的 Coxeter 图就是 $\Gamma(B_3)$,所以 $(F_4)_{\tilde{\alpha}}\simeq B_3$. 从例2.3知道 $|B_3|=48$,因此 $|F_4|=24.48=1152=2^7,3^2$.

再来计算 E_6,E_7,E_8的阶. 前面在证明 E_8的存在性时,已经列出了 E_8的根系 $\Phi(E_8)$(见(2-16))和一组基础根系 $\Delta(E_8)$(见(2-17)式),下面再列出 E_6和 E_7的根系和基础根系来.

沿用前面证明 E_8的存在性时的记号. 令 V_7表示 $\alpha_i(i=1,\cdots,7)$在 $\mathbf{R}^8$中张成的子空间,$\Phi(E_8)$中一共有126个根落在 V_7中,它们是

$$\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j(1\leqslant i<j\leqslant 6),\ \pm(\varepsilon_7-\varepsilon_8),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_7-\varepsilon_8+\sum_{i=1}^{6}\pm\varepsilon_i),\tag{2-20}$$

其中求和号中负号的个数是奇数. 可以证明,它们组成 V_7中的一

个根系(习题2.29),以

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\} \tag{2-21}$$

为一组基础根系,$W=\langle S_{\alpha_i}|i=1,\cdots,7\rangle$的 Coxeter 图就是 $\Gamma(E_7)$,因此 W 就是 E_7,(2-20)式是 $\Phi(E_7)$,(2-21)式是 $\Delta(E_7)$.

再令 V_6表示 $\alpha_i(i=1,\cdots,6)$张成的子空间,$\Phi(E_8)$中一共有72个根落在 V_6中,它们是

$$\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j(1\leqslant i<j\leqslant 5),\ \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6+\sum_{i=1}^{5}\pm\varepsilon_i), \tag{2-22}$$

其中求和号里负号的个数是偶数,可以证明,它们组成 V_6中的一个根系(习题2.30),以

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\} \tag{2-23}$$

为一组基础根系,$W=\langle S_{\alpha_i}|i=1,\cdots,6\rangle$的 Coxeter 图就是 $\Gamma(E_6)$. 因此这个 W 就是 E_6,(2-22)式是 $\Phi(E_6)$,(2-23)式是 $\Delta(E_6)$.

现在先来计算 E_6的阶. 用系理2.16和引理2.44可以证明,$\Phi(E_6)$是一条 E_6-轨道,而 $\Phi(E_6)$中的根 $\tilde{\alpha}=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5-\varepsilon_6-\varepsilon_7+\varepsilon_8)\in D$,因此 $\tilde{\alpha}$ 的轨道的长等于72. 因为$(\tilde{\alpha},\alpha_2)\neq 0$,$(\tilde{\alpha},\alpha_1)=(\tilde{\alpha},\alpha_3)=\cdots=(\tilde{\alpha},\alpha_6)=0$,所以$(E_6)_{\tilde{\alpha}}\simeq A_5$,而$|A_5|=6!$,于是$|E_6|=6!\cdot 72=2^7\cdot 3^4\cdot 5$.

再来计算 E_7的阶. 和 E_6一样,$\Phi(E_7)$是一条 E_7-轨道,而 $\Phi(E_7)$中的根 $\tilde{\alpha}=\varepsilon_8-\varepsilon_7\in D$. 因此 $\tilde{\alpha}$ 的 E_7-轨道长等于126,可以验证$(\tilde{\alpha},\alpha_1)\neq 0$,$(\tilde{\alpha},\alpha_i)=0$,$i=2,\cdots,7$,因此$(E_7)_{\tilde{\alpha}}\simeq D_6$,而$|D_6|=2^5\cdot 6!$,于是$|E_7|=2^5\cdot 6!\cdot 126=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$.

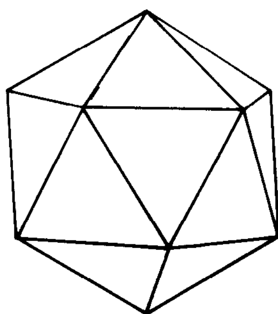
再来计算 E_8的阶,同样,$\Phi(E_8)$是一条 E_8-轨道,而 $\Phi(E_8)$中的根 $\tilde{\alpha}=\varepsilon_7+\varepsilon_8\in D$. 因此 $\tilde{\alpha}$ 的 E_8-轨道长等于240. 可以验证$(\tilde{\alpha},\alpha_i)=0$,$i=1,\cdots,7$,而$(\tilde{\alpha},\alpha_8)\neq 0$,因此$(E_8)_{\tilde{\alpha}}\simeq E_7$,于是$|E_8|=2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$.

最后来计算 H_3和 H_4的阶.

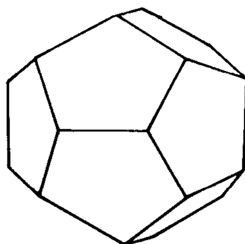
先指出 H_3是 $\mathbf{R}^3$中正二十面体的合同变换群，因此也是正十二面体的合同变换群，把后者记作 W. 正二十面体有20张面，都是正三角形，30条边，12个顶点. 设正二十面体的中心在坐标原点，它的12个顶点两两对中心对称，以两个对称的顶点为轴可以作$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$弧度的旋转，这一共得到$4\cdot 6=24$个元素，它们都是 W 中的元素，30条边也两两对中心对称，以两条对称边的中点的联线为轴作 π 弧度的旋转，这一共得到15个 W 中的元素. 20张面也两两对中心对称，以两张对称面的中点的联线为轴，作$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$弧度的旋转，这又得$2\cdot 10=20$个 W 中的元素. 连同单位变换，W 中一共有$24+15+20+1=60$个旋转，它们组成 W 的一个子群 W_0. 设 w 为 W 中的一个旋转，w 一定把一个给定的顶点 A 变到20个顶点之一，设为 A'，那么 w 就将与 A 有边相连的一个顶点 B 变到与 A' 有边相连的三个顶点之一，设为 B'，如果知道 $w(A)=A'$，$w(B)=B'$，那么 w 就完全被确定了. 因此 w 最多有$20\cdot 3=60$个可能. 这证明了 W_0由 W 中所有旋转组成. 但 W 中还有反射，以任何一对对称边中点的联线的垂直平分面为反射平面的反射也是 W 中的元素，这样 W 就有15个反射，因此 W_0是 W 的真子群，所以 $|W|=2|W_0|=120$. W 由这15个反射生成，证明留给读者(习题2.31)，不难证明 W 不可约. 根据不可约反射群的分类定理，秩是3的不可约反射群只有 A_3，B_3和 H_3，已知 $|A_3|=24$，$|B_3|=48$，所以 $W\neq A_3,B_3$，因此 $W=H_3$，那么 $|H_3|=120=2^3\cdot 3\cdot 5$.

再来计算 H_4的阶，根据系理2.16和引理2.44可知 H_4的根系 $\Phi(H_4)$是一条 H_4-轨道. 从前面对 H_4的根系的描述，可以知道 $|\Phi(H_4)|=120$，也知道 $k\in\Phi(H_4)$. $\Delta(H_4)=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$(见2-19)式，而 $(k_1\alpha_1)=(k,\alpha_2)=(k,\alpha_3)=0$，$(k,\alpha_4)\neq 0$. 根据命题2.28，$(H_4)_k=\langle s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},s_{\alpha_3}\rangle$，从 H_3和 H_4的 Coxeter 图可以看出 $\langle s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},s_{\alpha_3}\rangle$

$\simeq H_3$. 因此 $|H_4|=120\cdot 120=14400=2^6\cdot 3^2\cdot 5^2$.



正二十面体



正十二面体

图2-5 正二十面体和正十二面体

到这里为止已经算出了所有不可约有限反射群的阶，把它们列成一张表(如表2-1所示).

表2-1 不可约有限反射群的阶和根的个数

群	$\|W\|$	$\|\Phi\|$
A_n	$(n+1)!$	$n(n+1)$
B_n	$2^n\cdot n!$	$2n^2$
D_n	$2^{n-1}\cdot n!$	$2n(n-1)$
E_6	$2^7\cdot 3^4\cdot 5$	72
E_7	$2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$	126
E_8	$2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$	240
F_4	$2^7\cdot 3^2$	48
H_3	$2^3\cdot 3\cdot 5$	30
H_4	$2^6\cdot 3^2\cdot 5^2$	120
$I_2(m)$	$2m$	12

也已经算出了不可约有限反射群的根系和一组基础根系(H_3

的根系见习题2.26)现在把基础根系列表(如表2-2所示)

表2-2　不可约有限反射群的基础根系

群	基础根系
A_n	$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n)$
B_n	$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n-1)$, $\alpha_n=\varepsilon_n$
D_n	$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n-1)$, $\alpha_n=\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n$
E_6	$\alpha_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_i-\sum\limits_{i=2}^{7}\varepsilon_i+\varepsilon_8)$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_i=\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_{i-2}(3\leqslant i\leqslant 6)$
E_7	$\alpha_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\sum\limits_{i=2}^{7}\varepsilon_i+\varepsilon_8)$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_i=\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_{i-2}(3\leqslant i\leqslant 7)$
E_8	$\alpha_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_i-\sum\limits_{i=2}^{7}\varepsilon_i+\varepsilon_8)$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_i=\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_{i-2}(3\leqslant i\leqslant 8)$
F_4	$\alpha_1=\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\alpha_2=\varepsilon_3-\varepsilon_4$, $\alpha_3=\varepsilon_4$, $\alpha_4=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)$
H_3	$\alpha_1=(a,-\frac{1}{2},b)$, $\alpha_2=(-a,\frac{1}{2},b)$, $\alpha_3=(\frac{1}{2},b,-a)$
H_4	$\alpha_1=(a,-\frac{1}{2},b,0)$, $\alpha_2=(-a,\frac{1}{2},b,0)$, $\alpha_3=(\frac{1}{2},b,-a,0)$, $\alpha_4=(-\frac{1}{2},$ $-a,0,b)$
$I_2(m)$	$\alpha_1=(1,0)$, $\alpha_2=(-\cos\pi/m, \sin\pi/m)$

(表中 ε_i 是一组标准正交基,$a=(1+\sqrt{5})/4$, $b=(-1+\sqrt{5})/4$)

§2.8　晶体群,晶体根系,Weyl 群

设 V 是 n 维欧氏空间,L 是 V 的子集.如果 L 包含 V 的一组基,譬如 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,使得 $L=\mathbf{Z}\lambda_1+\cdots+\mathbf{Z}\lambda_n$,$L$ 就叫做 V 中的一个格.设 G 是 $O(V)$的一个子群,如果 V 有一个格 L 使得 $\sigma L\subset L,\forall\sigma\in G$,$G$ 就叫晶体群,这个名字来源于结晶学,在这里不详细说明,大多数有限反射群都是晶体群.

例2.2(续5)　$A_n,n\geqslant 1$,令

$$L=\mathbf{Z}\alpha_1+\cdots+\mathbf{Z}\alpha_n+\mathbf{Z}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}),$$

其中 $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$ 是 $\Phi(A_n)$ 的一组基础根系. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一组基，而 L 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的格. 显然 A_n 中任一元素都把 $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}$ 保持不动. 经简单计算可以证明

$$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1})=\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}, \text{如果 } j\neq i-1,i,i+1,$$

$$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)=\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_{i+1}=(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)+(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}),$$

$$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})=-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}),$$

$$s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2})=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2}=(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2}).$$

因为 $A_n=\langle s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}\,|\,i=1,\cdots,n\rangle$，所以 $wL\subset L,\forall\, w\in A_n$. 因此 A_n 是晶体群. □

例2.3（续5）　$B_n,n\geqslant 2$. 令

$$L=\mathbf{Z}\varepsilon_1+\cdots+\mathbf{Z}\varepsilon_n=\mathbf{Z}\alpha_1+\cdots+\mathbf{Z}\alpha_n,$$

而 $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\alpha_n=\varepsilon_n$ 是 $\Phi(B_n)$ 的一组基础根系. 容易证明 $s_{\alpha_i}L\subset L,i=1,\cdots,n$，因此 $wL\subset L,\forall\, w\in B_n$. 所以 B_n 是晶体群. □

例2.4　（续5）　$D_n,n\geqslant 4$. 令

$$\begin{aligned}L&=\mathbf{Z}\alpha_1+\cdots+\mathbf{Z}\alpha_n\\&=\mathbf{Z}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\cdots+\mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)+\mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)\\&=\{x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n\,|\,x_1+\cdots+x_n\equiv 0(\mathrm{mod}2)\},\end{aligned}$$

则 L 是 $\mathbf{R}^{(n)}$ 中的格. 不难证明 $s_{\alpha_i}L\subset L,i=1,\cdots,n$，因此 $wL\subset L$. 所以 D_n 是晶体群. □

但是并不是所有有限反射群都是晶体群. 下面的定理解答了什么样的有限反射群是晶体群.

命题2.45　设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群，Δ 是 W 的一组基础根系. W 是晶体群的必要充分条件是：

$m(\alpha,\beta)=2,3,4$或6，$\forall\ \alpha,\beta\in\Delta$而$\alpha\neq\beta$.

证 条件必要性的证明. 设$\alpha,\beta\in\Delta$而$\alpha\neq\beta$. 令$P=\mathbf{R}\alpha\oplus\mathbf{R}\beta$. 那么$P$是张平面而$V=P\oplus P^{\perp}$，$P^{\perp}\subset H_\alpha,H_\beta$，因此$s_\alpha s_\beta$把$P^{\perp}$中每个向量都保持不变，于是$s_\alpha s_\beta$可看作欧氏平面中的旋转. 因为$s_\alpha s_\beta$的阶等于$m(\alpha,\beta)$，所以$s_\alpha s_\beta$是$P$中绕原点转$\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)}$弧度角的旋转. 可设对于$P$的一组标准正交基$s_\alpha s_\beta$的矩阵是

$$T=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)} & -\sin\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)}\\ \sin\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)} & \cos\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}S_\alpha S_\beta&=\mathrm{Tr}(s_\alpha s_\beta)|_P+\mathrm{Tr}(s_\alpha s_\beta)|_{P^\perp}=\mathrm{Tr}T+(n-2)\\&=2\cos\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)}+n-2.\end{aligned}\tag{2-24}$$

因为假定了W是晶体群，所以V有一个格L使得$wL\subset L$，$\forall\ w\in W$. 设$L=\mathbf{Z}\lambda_1+\cdots+\mathbf{Z}\lambda_n$，这里$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$V$的一组基，那么对于$V$的基$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$s_\alpha s_\beta$的矩阵的矩阵元都是整数. 因此$\mathrm{Tr}s_\alpha s_\beta$是整数，从(2-24)式推出$\cos\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)}$是半整数，但是$m(\alpha,\beta)\neq1$，所以

$$\cos\frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)}=-1,-\frac{1}{2},0,\text{或}\frac{1}{2}.$$

因此相应的$m(\alpha,\beta)=2,3,4$，或6.

条件充分性的证明，设$m(\alpha,\beta)=2,3,4$，或6，$\forall\ \alpha,\beta\in\Delta,\alpha\neq\beta$. 只要对不可约有限反射群$W$来证明条件的充分性就够了. 这时$\Delta$也是不可约的，$W$的Coxeter图$\Gamma(W)$是棵标数树，因此可以排列$\Delta$的根成$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，具有性质：$\Gamma(W)$中每个顶点$\alpha_k(k>1)$都和$\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}$这些顶点中的一个而且是唯一的一个有边相连.

再来定义$\alpha_1'=a_1\alpha_1,\cdots,\alpha_n'=a_n\alpha_n(a_1,\cdots,a_n$都$>0)$，使得它们具有性质：$\forall\ 1\leqslant i<j\leqslant n$，当$\Gamma(W)$中顶点$\alpha_i$和$\alpha_j$有边相连时，

$$(\alpha_j',\alpha_j') = \begin{cases} (\alpha_i',\alpha_i'), \text{如果 } m(\alpha_i,\alpha_j) = 2; \\ 2(\alpha_i',\alpha_i'), \text{如果 } m(\alpha_i,\alpha_j) = 3; \\ 3(\alpha_i',\alpha_i'), \text{如果 } m(\alpha_i,\alpha_j) = 6. \end{cases} \tag{2-25}$$

首先，令 $\alpha_1'=\alpha_1$，即 $a_1=1$. 现在设 $k\geqslant 1$，并假定已经定义了 $\alpha_1'=a_1\alpha_1,\cdots,\alpha_k'=a_k\alpha_k,a_1,\cdots,a_k>0$，并且$\forall\ 1\leqslant i<j\leqslant k$，当 $\Gamma(W)$中顶点 α_i 和 α_j 有边相连时，(2-25)式成立. 再来定义 $\alpha_{k+1}'=a_{k+1}\alpha_k$. 设 $\Gamma(W)$中有边以 α_{k+1}和 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$为端点. 根据假设，$\alpha_i$ 被 α_{k+1}唯一确定，那么确定一个 $a_{k+1}>0$，使 $\alpha_{k+1}'=a_{k+1}\alpha_{k+1}$适合

$$(\alpha_{k+1}',\alpha_{k+1}') = \begin{cases} (\alpha_i',\alpha_i'), \text{如果 } m(\alpha_i,\alpha_{k+1}) = 2; \\ 2(\alpha_i',\alpha_i'), \text{如果 } m(\alpha_i,\alpha_{k+1}) = 3; \\ 3(\alpha_i',\alpha_i'), \text{如果 } m(\alpha_i,\alpha_{k+1}) = 6. \end{cases}$$

那么根据数学归纳法，可以定义 $\alpha_1'=a_1\alpha_1,\cdots,\alpha_n'=a_n\alpha_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都$\geqslant 0)$，使它们具有前面所说的性质.

令 $L=\mathbf{Z}\alpha_1'+\cdots+\mathbf{Z}\alpha_n'$，来证明 $wL\subset L,\forall\ w\in W$. 因为 $W=\langle s_{\alpha_i}\mid i=1,\cdots,n\rangle$，只要证明 $s_{\alpha_i}L\subset L,\forall\ i=1,\cdots,n$ 就可以了. 如果在 $\Gamma(W)$中没有边以 α_i 和 α_k 为端点，那么$(\alpha_i,\alpha_k)=0$，于是 $s_{\alpha_i}(\alpha_k)=\alpha_k$，因此 $s_{\alpha_i}(\alpha'_k)=\alpha_k'$. 再设 $\Gamma(W)$中有以 α_i 和 α_k 为端点的边，那么 $(\alpha_i,\alpha_k)\neq 0$. 根据系理2.11$(\alpha_i,\alpha_k)<0$. 分下面两个情形来讨论.

(i) $i>k$. 这时

$$(\alpha_i',\alpha_i') = [\frac{m(\alpha_i,\alpha_k)}{2}](\alpha_k',\alpha_k'),$$

其中$[x]$表示正实数 x 的整数部分. 和在条件的必要性证明中一样，令 $P=\mathbf{R}\alpha_i+\mathbf{R}\alpha_j$，$s_{\alpha_i}s_{\alpha_k}$在 P 上的限制就是 P 中绕原点转 $\dfrac{2\pi}{m(\alpha_i,\alpha_k)}$弧度角的旋转. 设 θ 是 α_i 和 α_k 的夹角，由$(\alpha_i,\alpha_k)<0$及 $\alpha_i\neq-\alpha_k$推出$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$. 那么 $\pi-\theta$ 就是反射超平面 H_{α_i}和 H_{α_j}的夹角而$0<\pi-\theta<\dfrac{\pi}{2}$. 因此，$\dfrac{2\pi}{m(\alpha_i,\alpha_k)}=2(\pi-\theta)$，于是 $\theta=\pi-$

$\frac{\pi}{m(\alpha_i,\alpha_k)}$. 因为$(\alpha_i,\alpha_k)\neq 0$,所以 $m(\alpha_i,\alpha_k)$只能等于3,4,6. 那么相应的 θ 的值就是$\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}$,相应的 $\cos\theta$ 的值就是$-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$,因此 $\cos\theta=-[\frac{m(\alpha_i,\alpha_k)}{2}]^{1/2}/2$. 但是

$$\cos\theta=\frac{(\alpha_i',\alpha_k')}{(\alpha_i',\alpha_i')^{1/2}(\alpha_k',\alpha_k')^{1/2}},$$

所以

$$2(\alpha_i',\alpha_k')=-\left[\frac{m(\alpha_i,\alpha_k)}{2}\right]^{1/2}(\alpha_i',\alpha_i')^{1/2}(\alpha_k',\alpha_k')^{1/2}=(\alpha_i',\alpha_i').$$

因此

$$S_{\alpha_i}(\alpha_k')=S_{\alpha_i}(\alpha_k')=\alpha_k'-\frac{2(\alpha_k',\alpha_i')}{(\alpha_i',\alpha_i')}\alpha_i'$$
$$=\alpha_k'+\alpha_i'\in L.$$

(ii) $i<k$. 这时

$$(\alpha_k',\alpha_k')=[\frac{m(\alpha_i,\alpha_k)}{2}](\alpha_i',\alpha_i').$$

同理

$$S_{\alpha_i}(\alpha_k')=\alpha_k'+[\frac{m(\alpha_i,\alpha_k)}{2}]\alpha_i'\in L.$$ □

命题2.45有下面这个重要的推论.

定理2.46 不可约有限反射群里,$A_n(n\geqslant 1),B_n(n\geqslant 2),D_n(n\geqslant 4),E_6,E_7,E_8,F_4,G_2=I_2(6)$是晶体群,而且只有它们是晶体群.

证 逐个检查不可约有限反射群是否满足命题2.45中晶体群的必要充分条件,可知 H_3和 H_4都不是晶体群,当 $m\neq 3,4$和6时,$I_2(m)$也不是晶体群,而其余的都是晶体群. 显然 $I_2(3)\simeq A_2$,$I_2(4)\simeq B_2$. 再把 $I_2(6)$记作 G_2,这就证明了定理2.46. □

设 Φ 是 n 维欧氏空间 V 中的根系，如果 Φ 还满足以下性质：

(R4) $$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\in\mathbf{Z},\forall\ \alpha,\beta\in\Phi,$$

Φ 就叫晶体根系. $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)$这些整数叫 Cartan 整数.

例 2.2～例2.4(续)中列出的 $\Phi(A_n)(n\geqslant 1)$，$\Phi(B_n)(n\geqslant 2)$，$\Phi(D_n)(n\geqslant 4)$ 都是晶体根系. 上节列出的 $\Phi(E_n)(n=6,7,8)$和 $\Phi(F_4)$也都是.

例2.5 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是 $\mathbf{R}^3$一组标准正交基. 令

$$V=\{x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3\mid x_1+x_2+x_3=0\},$$

而 Φ 是 $V\cap(\mathbf{Z}\varepsilon_1+\mathbf{Z}\varepsilon_2+\mathbf{Z}\varepsilon_3)$中长为2和6的向量之集，可以证明

$$\Phi=\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant 3\}\cup\{\pm 2\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k\mid\{i,j,k\}=\{1,2,3\}\},$$

Φ 是 V 中的晶体根系，$|\Phi|=12$，而

$$\Delta=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\alpha_2=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\}$$

是一组基础根系. 更进一步还可以证明 $W=\langle\sigma_\alpha\mid\alpha\in\Phi\rangle$和 $I_2(6)$同构. □

命题2.47 设 Φ 是根系，$W=\langle s_\alpha\mid\alpha\in\Phi\rangle$是晶体群，那么可以把 Φ 中的根各乘以适当的非零实数倍，就得到晶体根系.

证 只要对于不可约的根系 Φ 来证明就行了. 设 Δ 是 Φ 的一组基础根系，那么 Δ 也是不可约的，W 也是不可约的，W 的 Coxeter 图是棵标数树. 和命题2.45的证明中一样，可以排列 Δ 的根成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，具有性质：每个顶点 $\alpha_k(>1)$都和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}$这些顶点中的一个而且是唯一的一个有边相连. 先定义 $\alpha_1'=a_1\alpha_1$，使得 $(\alpha_1',\alpha_1')=1$，再和定理2.45的证明中一样来定义 $\alpha_2'=a_2\alpha_2,\cdots,\alpha_n'=a_n\alpha_n$ $(a_2,\cdots a_n$ 都$>0)$，使它们具有性质：$\forall\ 1\leqslant i<j\leqslant n$，当 $\Gamma(W)$中顶点 α_i 和 α_j 有边相连时，

$$(\alpha_j',\alpha_j')=\begin{cases}(\alpha_i',\alpha_i')\text{，如果 } m(\alpha_i,\alpha_j)=3;\\2(\alpha_i',\alpha_i')\text{，如果 } m(\alpha_i,\alpha_j)=4;\\3(\alpha_i',\alpha_i')\text{，如果 } m(\alpha_i,\alpha_j)=6.\end{cases}$$

把这样得到的根集记作 Δ'. 显然，如果 α_i 和 α_j 在 Coxeter 图 $\Gamma(W)$ 中有一串不标数(或标数3)的边相连，那么 $(\alpha_i',\alpha_i')=(\alpha_j',\alpha_j')$. 如果 α_i 和 α_j 有一条标数为 m 的边相连，那么 $(\alpha_i',\alpha_i')=[\frac{m}{2}](\alpha_j',\alpha_j')$，或 $(\alpha_j',\alpha_j')=[\frac{m}{2}](\alpha_i',\alpha_i')$. 因此对于 $A_n(n\geqslant 1)$，$D_n(n\geqslant 4)$，$E_n(n=6,7,8)$，这样定义的 Δ' 中的向量的长都等于1. 对于 $B_n(n\geqslant 2)$，F_4 和 G_2，Δ' 中的向量的长的平方都取两个值；对于 $B_n(n\geqslant 2)$ 和 F_n，这两个值是1和2；对于 G_2，这两个值是1和3. 如果把 (α_i',α_i') 标在 W 的 Coxeter 图中代表 α_i 的顶点的下面，就得到图2-6所示。

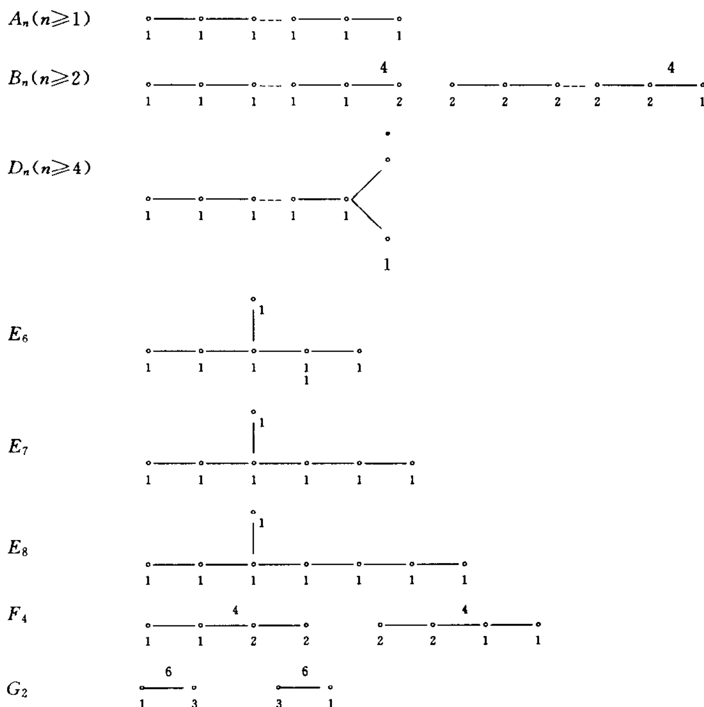


图2-6

对于 $\gamma\in\Phi$，根据系理2.16，有 $w\in W$ 使 $w\gamma\in\Delta$；设 $w\gamma=\alpha_i$，那

么定义 $\gamma'=a_i\gamma$，于是有 $(\gamma',\gamma')=(\alpha_i',\alpha_i')$ 和 $w\gamma'=\alpha_i'$. 从 $W\subset O(V)$ 可以推出这个定义是合理的. 令 $\Phi'=\{\gamma'\mid\gamma\in\Phi\}$. 显然 Φ' 是根系而以 Δ' 为基础根系. 还要证明 Φ' 是晶体根系. 先证明

$$\frac{2(\beta',\alpha')}{(\alpha',\alpha')}\in\mathbf{Z},\forall\ \alpha',\beta'\in\Delta'.$$

当 $\alpha'=\beta'$ 时，这是显然的. 设 $\alpha'\neq\beta'$，令 θ 为 α' 和 β' 的夹角，那么 $s_{\alpha'}s_{\beta'}$ 在 $P=\mathbf{R}\alpha'+\mathbf{R}\beta'$ 上的限制就是个转 $2(\pi-\theta)$ 弧度角的旋转，而在 $P^{\perp}$ 上限制为单位映射. $m(\alpha',\beta')=m(\alpha,\beta)$ 是 $s_{\alpha'}s_{\beta'}=s_\alpha s_\beta$ 的阶，因此

$$m(\alpha,\beta)=\frac{2\pi}{2(\pi-\theta)}=\frac{\pi}{\pi-\theta}.$$

和命题2.45的证明一样，可以推出

$$\cos\theta=-\left[\frac{m(\alpha,\beta)}{2}^{1/2}\right]/2,$$

但是

$$\cos\theta=\frac{(\alpha',\beta')}{(\alpha',\alpha')^{1/2}(\beta',\beta')^{1/2}}.$$

当 α' 在 β' 之前定义时，$(\beta',\beta')=\left[\frac{m(\alpha,\beta)}{2}\right](\alpha',\alpha')$，于是

$$\frac{2(\beta',\alpha')}{(\alpha',\alpha')}=\frac{2(\beta',\alpha')}{(\alpha',\alpha')^{1/2}(\beta',\beta')^{1/2}}\left[\frac{m(\alpha,\beta)}{2}\right]^{-1/2}=-1\in\mathbf{Z}.$$

当 β' 在 α' 之前定义时，$(\beta',\beta')=\left[\frac{m(\alpha,\beta)}{2}\right]^{-1}(\alpha',\alpha')$，于是

$$\frac{2(\beta',\alpha')}{(\alpha',\alpha')}=\frac{2(\beta',\alpha')}{(\alpha',\alpha')^{1/2}(\beta',\beta')^{1/2}}\left[\frac{m(\alpha,\beta)}{2}\right]^{1/2}=-m(\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}.$$

其次，设 $\gamma'\in\Phi'$，那么有 $w\in W$ 和 $\alpha_i'\in\Delta'$ 使 $\gamma'=w\alpha_i'$. 将 w 表成基础反射之积 $w=s_1\cdots s_r$（s_i 都是基础反射），对于 γ 作归纳可以证明 γ' 可以表成 $\alpha_1',\cdots,\alpha_n'$ 的整系数线性组合.

最后，对任意 $\gamma',\delta'\in\Phi'$，有 $w\in W$ 使 $w\gamma'\in\Delta'$，把 $w\delta'$ 表成 $w\delta'=\sum\limits_{\alpha'\in\Delta'}n_{\alpha'}\alpha'$，那么

$$\frac{2(\gamma',\delta')}{(\gamma',\gamma')}=\frac{2(w\gamma',w\delta')}{(w\gamma',w\gamma')}=\sum_{\alpha'\in\Delta'}n_{\alpha'}\frac{2(w\gamma',\alpha')}{(w\gamma',w\gamma')}\in\mathbf{Z}.$$

因此 Φ' 适合(R4)，所以 Φ' 是晶体根系.

在命题2.47的证明中，证明了下面这个重要事实.

系理2.48 设 Φ 是晶体根系，而 Δ 是它的一组基础根系. 那么任一 $\gamma\in\Phi$ 都可以表成 Δ 中根的整系数线性组合，系数或者都是 $\geqslant 0$ 的整数，或者都是 $\leqslant 0$ 的整数. □

从定理2.47的证明还知道，从 $B_n(n\geqslant 2)$，F_4 和 G_2 的根系 Φ 出发，得到的晶体根系 Φ' 中的根的长有两个值，根长取小的那个值的根叫*短根*，根长取大的那个值的根叫*长根*.

定理2.47中画出的那些顶点注了数的 Coxeter 图，叫做*相应的晶体根系的图*.

设 Φ 和 Ψ 是两个晶体根系，如果有一个双射 $\varphi:\Phi\to\Psi$，有性质 $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=c(\alpha,\beta)$，$\forall\ \alpha,\beta\in\Phi$，其中 c 是一个不依赖于 α 和 β 的常数，就说 Φ 和 Ψ *相似*，而 c 叫*相似因子*. 当 $c=1$ 时，就说 Φ 和 Ψ *合同*. 若要确定所有的两两不相似的晶体根系，只要确定两两不相似的不可约晶体根系就行了. 检查定理命题2.47的证明中画出的晶体根系的图，就会发现



代表相似的晶体根系(实际是合同的晶体根系)，



以及



也一样. 但是当 $n\geqslant 3$ 时，



确是不相似晶体根系的图，因为左方那个图代表的晶体根系的基础根系里有 $n-1$ 个长为1的根和1个长为 $\sqrt{2}$ 的根，而右方那个图

代表的晶体根系的基础根系里有 $n-1$ 个长为 $\sqrt{2}$ 的根1个长为1的根.把前者记作 C_n,而把后者记为 B_n.通常用 Dynkin 图来代表不可约晶体根系;只要在晶体根系的图中把边上标的数取消,而用双边 ○══○ 代替标了4的边,用三边 ○≡≡○ 代替标了6的边,也把顶点上注的长度平方取消,而在双边或三双上标上个箭头指向短根,就得到 Dynkin 图.

定理2.49　不可约晶体根系的 Dynkin 图有且只有下面这些:

$A_n(n\geqslant 1)$

$B_n(n\geqslant 2)$

$C_n(n\geqslant 2)$

$D_n(n\geqslant 4)$

E_6

E_7

E_8

F_4

G_2

图2-7　不可约晶体根系的 dynkin 图

注意:用 A_n 这一个符号既代表不可约有限反射群 A_n,又代表群 A_n 的晶体根系等等.但是,晶体根系 C_n 也是不可约有限反射群 B_n 的晶体根系.

例2.2(续1)～例2.4(续1)中列出的根系 $\Phi(A_n)(n\geqslant 1)$, $\Phi(B_n)(n\geqslant 2)$, $\Phi(D_n)(n\geqslant 4)$ 都是晶体根系,再具体列出晶体根系 $C_n(n\geqslant 2)$.

例2.6 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基，$n\geqslant 2$. 令

$$C_n=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)\,|\,1\leqslant i<j\leqslant n\}\cup\{\pm 2\in i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}.$$

可以证明 $C_n(n\geqslant 2)$ 是晶体根系，由 $2n$ 个长根 $\pm 2\varepsilon_i$ 和 $2n(n-1)$ 个短根 $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$ 组成，而

$$\Delta(C_n)=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\alpha_n=2\varepsilon_n\}$$

是 C_n 的一组基础根系. 显然，$W(C_n)=W(B_n)$.

晶体根系 Φ 按命题2.10所定义的有限反射群 $W=\langle S_\alpha\,|\,\alpha\in\Phi\rangle$ 叫 Weyl 群.

定理2.50 $A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 2)$, $D_n(n\geqslant 4)$, $E_n(n=6,7,8)$, F_4, G_2都是不可约 Weyl 群，而不可约 Weyl 群只有这些.

证 根据定理2.49，不可约晶体根系只有 $A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 2)$, $C_n(n\geqslant 2)$, $D_n(n\geqslant 4)$, $E_n(n=6,7,8)$, F_4, G_2，而它们所定义的有限反射群分别是 $A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 2)$, $B_n(n\geqslant 2)$, $D_n(n\geqslant 4)$, $E_n(n=6,7,8)$, F_4, G_2. □

晶体根系 Φ 中的根的整系数线性组合的全体组成一个格，叫做根格，记作 $L(\Phi)$.

命题2.51 晶体根系 Φ 所定义的 Weyl 群 W 中任一元素都把根格 $L(\Phi)$ 变到自己. 因此 Weyl 群都是晶体群. 反过来，晶体群也都是 Weyl 群.

证 Φ 是晶体根系，所以$\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}$, $\forall\,\alpha,\beta\in\Phi$. 因此

$$s_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in L(\Phi).$$

$W=\langle s_\alpha\,|\,\alpha\in\Phi\rangle$，所以 $w(\beta)\in L(\Phi)$, $\forall\,w\in W,\beta\in\Phi$. 那么 $wL(\Phi)\subset L(\Phi)$, $\forall\,w\in W$. 因此 W 是晶体群.

反过来，设 W 是晶体群，根据命题2.47，W 有晶体根系，因此 W 是 Weyl 群. □

注记 实际上也定出了有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的切实地作用在 $\mathbf{Q}$ 上有限维向量空间 V 上的所有有限反射群. 这只要在不可约有限实反射群中挑选出那些有限有理反射群就行了. 利用命题2.45的条件必要性的证明中(2-24)式是有理数这一事实即可推出

命题2.52 设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限有理反射群, Δ 是 W 的一组基础根系. 那么 $m(\alpha,\beta)=2,3,4$, 或6, $\forall\ \alpha,\beta\in\Delta$ 而 $\alpha\neq\beta$. □

因此, 要找不可约有限有理反射群, 只要到不可约晶体群中去找就行了. 根据定理2.46, 不可约晶体群只有 $A_n(n\geqslant1)$, $B_n(n\geqslant2)$, $D_n(n\geqslant4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, $G_2=I_2(6)$, 而它们都是有理的. 因此有

定理2.53 $A_n(n\geqslant1)$, $B_n(n\geqslant2)$, $D_n(n\geqslant4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, $G_2=I_2(6)$ 都是不可约有限有理反射群, 而且不可约有限有理反射群一定是它们中的一个. □

§2.9 习题

2.1 设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 V 的两组基, 并设 $\varepsilon_i'=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}\varepsilon_j$. 再设 $\xi,\eta\in V$, 把它们表成

$$\xi=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n=x_1'\varepsilon_1'+\cdots+x'_n\varepsilon_n',$$
$$\eta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n=y_1'\varepsilon_1'+\cdots+y'_n\varepsilon_n',$$

这里 $x_1,\cdots,x_n,x_1',\cdots,x_n',y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n'\in\mathbf{R}$. 定义

$$(\xi,\eta)_1=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,\ (\xi,\eta)_2=x_1'y_1'+\cdots+x_n'y_n',$$

证明 $(\xi,\eta)_1=(\xi,\eta)_2$, $\forall\ \xi,\eta\in V$, 当且仅当 (t_{ij}) 是正交矩阵.

2.2 设 V 是 n 维欧氏空间, U 是 V 的子空间, 定义

$$U^{\perp}=\{\eta\in V\mid(\xi,\eta)=0,\forall\ \xi\in U\}.$$

证明: (a) $U^{\perp}$ 是 V 的子空间;

(b) $V=U\oplus U^{\perp}$;

(c) $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

2.3 设 V 是 n 维欧氏空间，G_1 和 G_2 是 $O(V)$ 的子群. 假定 G_1 和 G_2 在 $GL(V)$ 中共轭. 证明 G_1 和 G_2 在 $O(V)$ 中共轭.

2.4 证明引理2.4.

2.5 (a)设 ε_1 和 ε_2 是欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 的一组标准正交基，T 是 $\mathbf{R}^2$ 中绕坐标原点作 θ 角的旋转. 设 $\xi\in\mathbf{R}^2$，把 ξ 和 $T\xi$ 分别表成 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2, T\xi=x_1'\varepsilon_1+x_2'\varepsilon_2$. 证明：

$$x_1' = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta,$$
$$x_2' = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta.$$

(b) 设 $y=\tan\theta x, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，是 $\mathbf{R}^2$ 中一条直线，σ_θ 是以这条直线为反射直线的反射. 设 $\xi\in\mathbf{R}^2$，把 ξ 和 $\sigma_\theta\xi$ 分别表成 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2, \sigma\xi=x_1'\varepsilon_1+x_2'\varepsilon_2$. 证明：

$$x_1' = x_1\cos 2\theta + x_2\sin 2\theta,$$
$$x_2' = x_1\sin 2\theta - x_2\cos 2\theta.$$

如果 σ 是以 y 轴为反射直线的反射，只要令 $\theta=\frac{\pi}{2}$，那么上式也成立.

(c) 设 l_1 和 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 中过原点的两条直线，它们的夹角是 $\theta, 0<\theta<\pi$. 用 σ_1 和 σ_2 分别表以 l_1 和 l_2 为反射直线的反射. 证明 $\sigma_1\sigma_2$ 是绕原点转 2θ 角的旋转.

2.6 证明由两个生成元 s_1 和 s_2 和定义关系 $s_1^2=s_2^2=(s_1s_2)^m=1\ (m\geqslant 3)$ 所定义的群一定和 $I_2(m)$ 同构.

2.7 证明 $I_2(m), m\geqslant 2$ 是不可约群.

2.8 证明 $A_n(n\geqslant 1)$ 是作用在 $\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^{\perp}$ 上的不可约群. 再证明 A_n 中的反射都是 S_{n+1} 中的对换.

2.9 详细给出例2.3中各个断言的证明.

2.10 详细给出例2.4中各个断言的证明.

2.11 证明例2.1(续2)～例2.4(续2)中列举的 $\Delta(I_2(m)), \Delta(A_n)$, $\Delta(B_n)$ 和 $\Delta(D_n)$ 分别是 $\Phi(I_2(m)), \Phi(A_n), \Phi(B_n)$，和 $\Phi(D_n)$ 的一组基础根系.

2.12 设根系 Φ 的秩等于2，证明 $W(\Phi)$ 是二面体群 $I_2(m)$，对某一 $m\geqslant 3$.

2.13 设 Δ 是根系 Φ 的一组基础根系. 证明 $\{s_\alpha \mid \alpha\in\Delta\}$ 的任一真子集不能生成 $W(\Phi)$.

2.14 选 S_{n+1} 中的基础反射为 $(1,2),(2,3),\cdots,(n,n+1)$. 设 $i\in(1,\cdots,$

$n+1$),如果$\pi(i)<i$,i就叫π的一个*逆序*.证明对任意$\pi\in S_{n+1}$,$l(\pi)$等于逆序的个数.

2.15　在替换条件中,如果还假定$w=s_1\cdots s_r$是w的既约表示式,那么结论中的i是唯一确定的.

2.16　对于例2.1(续2)~例2.4(续2)中列举出的基础根系$\Delta(I_2(m))$,$\Delta(A_n)$,$\Delta(B_n)$,$\Delta(D_n)$,分别确定$I_2(m)$,A_n,B_n,D_n的最长元素(定义见系理2.21).

2.17　设W是切实作用在n维欧氏空间上的有限反射群,证明W的最长元素w_0的任一既约表示式中,每个基础反射至少出现一次.

2.18　证明命题2.30.

2.19　证明命题2.32.(提示:设标数图的顶点集$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$,去证明$A=(-\cos\pi/m(\alpha_i,\alpha_j))$定正,这需要计算$A$的主子式.为了避免在计算中2出现在分母里,可以去计算$2A$的主子式.先对$\Gamma(I_2(m))$来计算.对A_n,B_n,D_n和E_n,当$n\geqslant3$时,选α_n是只和另外一个顶点(选为α_{n-1})有边相连的顶点.再对n作归纳法来计算$\det 2A$.

2.20　详细给出命题2.34的证明.

2.21　证明A_n的抛物子群都和有限个S_k的直积同构.

2.22　证明引理2.37.

2.23　证明(2-14)式是$\mathbf{R}^4$中的根系,(2-15)式是它的基础根系.

2.24　证明(2-16)式是$\mathbf{R}^8$中的根系,(2-17)式是它的基础根系,并证明由(2.16)式中的根所确定的反射生成的群的Coxeter图就是$\Gamma(E_8)$.

2.25　设Φ是由$1,\frac{1}{2}(1+i+j+k),a+\frac{1}{2}i+bj$这三个四元数经坐标的偶置换和改变任意个坐标的符号而得到的四元数集合.证明Φ以四元数乘法为运算组成一个120阶的群,因而是$\mathbf{H}$中的根系.再证明Φ是不可约的,而且Φ以(2-19)式为一组基础根系.最后再仿照F_4的存在性证明去证$W(\Phi)$的Coxeter图是$\Gamma(H_4)$.

2.26　列举出H_3的根系和一组基础根系.

2.27　证明引理2.43.

2.28　证明引理2.44.

2.29　证明(2-20)式是E_7的根系,(2-21)式是一组基础根系.

2.30　证明(2-22)式是E_6的根系,(2-23)式是一组基础根系.

2.31 证明二十面体的对称变换群是不可约反射群.

2.32 设 Φ 是不可约根系. 如果 Φ 中向量的长度都相等,那么 Φ 就是一个 W-轨道,这里 $W=W(\Phi)=\langle s_\alpha \mid \alpha\in\Phi\rangle$. 如果 Φ 有两种长度的根,那么 Φ 是两个 W-轨道的并,一个 W-轨道由长根组成,另一个由短根组成.

2.33 设 Φ 是不可约晶体根系,Δ 是 Φ 的一组基础根系. 设 $\lambda,\mu\in\Phi$,如果 λ-μ 是 Δ 中向量的非负整系数线性组合,就规定 $\lambda\geqslant\mu$. 这样定义了 Φ 的一个偏序. 证明:

(a) Φ 有唯一一个最高根 $\tilde{\alpha}$,即 $\tilde{\alpha}\in\Phi$ 而 $\tilde{\alpha}\geqslant\alpha$, $\forall\ \alpha\in\Phi$. 设 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 而 $\tilde{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$,则 $k_i(i=1,\cdots,n)$都是正整数.

(b) 如果 Φ 有两种长度的根,那么 Φ 的最高根 $\tilde{\alpha}$ 是长根,而且 Φ 有唯一一个最高短根 $\tilde{\beta}$,即 $\tilde{\beta}\in\Phi$, $\tilde{\beta}$ 是短根,而 $\tilde{\beta}\geqslant\beta$ 对 Φ 中任意短根 β,这样一个 $\tilde{\beta}$ 叫 Φ 中最高短根.

2.34 对每个不可约晶体根系,求它们的最高根. 对于不可约晶体根系 B_n, C_n, F_4和 G_2,求它们的最高短根.

2.35 设 Φ 是根系,$\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是它的一组基础根系,而 Π 是含 Δ 的正根系. 令 $\rho=\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Pi}\alpha$.

(a) 证明$(\rho,\alpha_i)>0$, $\forall\ \alpha_i\in\Delta$;

(b) 对于每个不可约根系 Φ,将 ρ 表成 Δ 中基础根的线性组合.

2.36 设 Φ 是晶体根系,Δ 是 Φ 的一组基础根系. 设 $\alpha\in\Phi$ 定义 $\alpha^V=\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$, α^V 叫做 α 的对偶根或余根,令 $\Phi^V=\{\alpha^V\mid\alpha\in\Phi\}$, $\Delta^V=\{\alpha^V\mid\alpha\in\Delta\}$. 证明: Φ^V 也是晶体根系,Δ^V 是它的一组基.

(a) 证明 Φ^V 也是晶体根系,Δ^V 是它的一组基础根系,$(\alpha^V)^V=\alpha$,而$(w\alpha)^V=w\alpha^V$, $\forall\ w\in W(\Phi)$, $\alpha\in\Phi$. Φ^V 叫 Φ 的对偶根系或余根系.

(b) 证明:Φ^v 不可约当且仅当 Φ 不可约.

(c) 假定 Φ 不可约,证明 Φ^V 与 Φ 相似,除开 $\Phi=B_n$ 和 C_n 这两个情形,而 B_n^V 与 C_n 相似

(d) 举例说明,有 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi$,但是$(\alpha+\beta)^V\neq\alpha^V+\beta^V$.

2.37 设 Φ 是有限维欧氏空间 V 中的晶体根系,定义

$$\hat{L}(\Phi)=\{\lambda\in V\mid(\lambda,\alpha^V)\in\mathbf{Z},\quad\forall\ \alpha\in\Phi\}.$$

证明:(a) $\hat{L}(\Phi)$是一个格,叫做权格;

(b) $w\hat{L}(\Phi)=\hat{L}(\Phi)$，$\forall\ w\in\Phi$；

(c) $L(\Phi)\subset\hat{L}(\Phi)$.

2.38　对每个不可约晶体根系 Φ，确定商群 $\hat{L}(\Phi)/L(\Phi)$的结构.

2.39　设 Φ 是不可约晶体根系，$\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是它的一组基础根. 矩阵 $((\alpha_i,\alpha_j^V))$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，叫 Φ 的 Cartan 矩阵. 证明

$$|\hat{L}(\Phi)/L(\Phi)| = \det((\alpha_i,\alpha_j^V)).$$

(提示：对每个不可约晶体根系来证明.)

2.40　设 V 是 n 维欧氏空间，L 是 V 中的一个格，再设 L'是 L 的子群，V'是 L'在 $\boldsymbol{R}$ 上张成的子空间. 证明 L'是 V'中的格，叫做 L 的子格. 设 $L_1,\cdots,L_m$ 是 L 的子格，$L=L_1+\cdots+L_m$，而$(x_i,x_j)=0\ \forall\ x_i\in L_i,x_j\in L_j$ 而 $i\neq j$，就说 L 写成了两两正交的子格 $L_1,\cdots,L_m$ 的直和. 如果 L 不能写成两个或两个以上的两两正交的非零子格的直和，L 就叫不可约的. 证明 V 中的格 L 都可以写成有限个两两正交的非零不可约子格的直和，而且如果 $V=L_1+\cdots+L_m=L_1'+\cdots+L_{m'}'$ 是 L 写成有限个两两正交的非零不可约子格直和的两种写法，那么 $m=m'$而重排 $L_1',\cdots,L_{m'}'$ 之后可设 $L_i=L_i'(i=1,\cdots,m)$.

2.41　设 Φ 是晶体根系，$L(\Phi)$是 Φ 中根的整系数线性组合组成的根格. 证明：

(a) Φ 是不可约根系，当且仅当 $L(\Phi)$是不可约格.

(b) 如果 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$，而$(\alpha,\beta)=0$，$\forall\ \alpha\in\Phi_1,\beta\in\Phi_2$，那么 Φ_1和 Φ_2都分别是它们张成的向量空间中的根系，而且 $L(\Phi)$是彼此正交的子格 $L(\Phi_1)$和 $L(\Phi_2)$的直和. 反之，设 $L(\Phi)$是彼此正交的子格 L_1和 L_2的直和. 令 $\Phi_i=\Phi\cap L_i(i=1,2)$，那么 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$，而$(\alpha,\beta)=0\ \forall\ \alpha\in\Phi_1,\beta\in\Phi_2$.

2.42　设 V 是 n 维欧氏空间，L 是 V 中的一个格. 如果$(x,y)\in\mathbf{Z}$，$\forall\ x,y\in L$，L就叫做**整格**. 如果 L 是 V 中的整格而$(x,x)\in 2Z$，$\forall\ x\in L$，L 就叫做 V 中的**偶格**.

(a) 设 L 是 V 中的偶格，令 $\Phi=\{\alpha\in L\mid(\alpha,\alpha)=2\}$，并假定 L 由 Φ 中向量的线性组合组成. 证明 Φ 是 X 中的根系，而且是晶体根系，并且 $L=L(\Phi)$是根格.

(b) 如果 Φ 是 V 中一些范数等于2的向量组成的根系，那么根格 $L=L(\Phi)$是偶格. 如果 Φ 还是不可约根系，那么 $L=L(\Phi)$也不可约.

(c) 如果规定根系 $A_n(n\geqslant1)$，$D_n(n\geqslant4)$，$E_n(n=6,7,8)$中向量的范数都等于2，那么由范数等于2的向量在 $\mathbf{Z}$ 上张成的不可约偶格只有 $A_n(n\geqslant1)$，D_n

$(n\geqslant 4)$,$E_n(n=6,7,8)$的根格.

2.43 设 V 是 n 维欧氏空间,Φ 是 V 中的不可约根系,t 是 V 上的线性变换,并假定 $tw=wt$,$\forall\ w\in W(\Phi)$. 证明 t 一定是 V 上恒同变换的实数倍数.

2.44 设 V 是 n 维欧氏空间,$f\in V^*$. 证明 V 中有唯一一个向量 y_f 使 $f(x)=(x,y_f)$,$\forall\ x\in V$ 而映射 $f\rightarrow y_f$ 是从 $V^{\perp}$ 到 V 之上的向量空间同构(利用这个映射把 V^* 和 V 视为同一,即把 $f\in V^*$ 视作 $y_f\in V$).

2.45 设 V 是 n 维欧氏空间,W 是切实地作用在 V 上的不可约有限反射群,$q\in F[V^*]_2$,并假定 $q(w(x))=q(x)$,$\forall\ w\in W$,$x\in V$. 证明 q 是 V 中范数的实数倍数,即有 $c\in\mathbf{R}$ 使 $q(x)=c(x,x)$(提示:利用习题1.19,2.42和2.43).

第三章　有限反射群的不变式

第一章介绍了有限伪反射群不变式的一般理论，在目前这一章里对于有限反射群把讨论进一步具体化. 3.1节介绍了不可约有限反射群的 Coxeter 元、Coxeter 数和指数，特别指出指数和次数的简单联系，只要算出了有限反射群的指数，就马上得到它的次数；用这种方法求出了所有不可约有限反射群的次数. 在3.2节中，对每个不可约有限反射群都定出了它的一组基本不变式. 3.3节讨论了有限反射群的 Poincaré 多项式，作为有限反射群表示论的应用，介绍它的一个因子分解式，有限反射群的次数巧妙的出现在这个分解式里.

§3.1　Coxeter 元和它的特征值

设 W 是作用在 n 维欧氏空间 V 上的不可约有限反射群，当 $n=1$时还假定 $W\neq\{1\}$. 设 Φ 是 W 的根系，为方便起见假定根的长都等于1. 设 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是一组基础根系，并令 $s_i=s_{\alpha_i}, i=1,\cdots,n$. $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的积 $s_1s_2\cdots s_n$ 就叫 W 的一个 Coxeter 元. 当 W 给定时，它的根系 Φ 唯一被确定，但是 Φ 的基础根系 Δ 却不是唯一的. 此外，Δ 中基础根的排列次序也不唯一. 对应于一个基础根系 Δ 和 Δ 中基础根的一种排列次序，就有一个 Coxeter 元. Coxeter 于1951年证明了下面这个命题.

命题3.1　W 的 Coxeter 元都在 W 中共轭.

证　设 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$和 $\Delta'=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$是 Φ 的两个基础根系，根据命题2.14，有 $w\in W$ 使 $w\Delta=\Delta'$，假设 $w\alpha_i=\beta_i$，那么 $s_{\beta_i}=s_{w\alpha_i}=ws_{\alpha_i}w^{-1}$. 于是 $w(s_{\alpha_i}\cdots s_{\alpha_n})w^{-1}=s_{\beta_1}\cdots s_{\beta_n}$. 记 $s_i=s_{\alpha_i}, i=1,\cdots,n$.

因此只要再证明,如果 $i_1,\cdots,i_n$ 是1,…,n 的任意一个置换,那么 $s_{i_1}\cdots s_{i_n}$和 $s_1\cdots s_n$ 在 W 中共轭.

注意:$s_n(s_1\cdots s_n)s_n^{-1}=s_ns_1\cdots s_{n-1}$,即 $s_1\cdots s_n$ 和它的 n 个因子经循环置换以后而得到的 Coxeter 元在 W 中共轭. 如果 $s_js_{j+1}=s_{j+1}s_j$,那么 $s_1\cdots s_js_{j+1}\cdots s_n=s_1\cdots s_{j-1}s_{j+1}s_js_{j+2}\cdots s_n$. 因此只要证明,反复作用这两种变换到 $s_{i_1}\cdots s_{i_n}$上来,可以得到 $s_1\cdots s_n$.

当 $n=1$时,没有什么要证的. 设 $n>1$,因为不可约有限反射群的 Coxeter 图是树,不妨假定对应 α_n 的顶点只和另外一个顶点有边相连,根据归纳法假设,把 s_n 从 $s_{i_1}\cdots s_{i_n}$中取消以后,用以上两种变换可以把它变到 $s_1\cdots s_{n-1}$,再把 s_n 添到原来的位置上来. 如果作用的是循环置换,就让 s_n 跟着做循环排列,再设作用的变换是交换两个紧挨着的 s_i 和 s_j 而 $s_is_j=s_js_i$,如果 s_n 不在它们之间,那么添上 s_n 之后仍然可以做这个变换,如果 s_n 在它们之间,添上 s_n 以后就有 $s_is_ns_j$,根据对 W 的 Coxeter 图中对应 α_n 的顶点所作的假定,s_n 最多和其余 s_k 中的一个不可交换,如果 $s_ns_i\neq s_is_n$,那么 $s_is_ns_j=s_is_js_n$,如果 $s_ns_j\neq s_js_n$,那么 $s_is_ns_j=s_ns_is_j$. 因此 $s_{i_1}\cdots s_{i_n}$经上述两种变换后可达到一个 Coxeter 元 $s_1\cdots s_ks_ns_{k+1}\cdots s_{n-1}$,其中$0\leqslant k\leqslant n-1$. 如果 $k=0$,经循环置换可以把 $s_ns_1\cdots s_{n-1}$变到 $s_1\cdots s_{n-1}s_n$;如果 $k=n-1$,已经达到了目的. 再设$0<k<n-1$,如果 s_n 与 $s_1,\cdots,s_k$ 都可交换,那么 $s_1\cdots s_ks_ns_{k+1}\cdots s_n=s_ns_1\cdots s_{n-1}$,再经一循环置换就得到 $s_1\cdots s_{n-1}s_n$,如果 s_n 与 $s_{k+1},\cdots,s_{n-1}$都可交换,那么 $s_1\cdots s_ks_ns_{k+1}\cdots s_n=s_1\cdots s_n$. □

因为 W 中的 Coxeter 元都共轭,所以它们的阶都相等,则它们共同的阶叫做 W 的 Coxeter 数,记作 h,有些不可约有限反射群的 Coxeter 数很容易直接算出来.

例3.1 $I_2(m),m\geqslant 3$. $I_2(m)$的 Coxeter 元是两个生成反射的乘积,它是个$\frac{2\pi}{m}$弧度的旋转,因此它的阶是 m. □

例3.2　$A_n, n\geqslant 1$. 令

$$\Delta=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}\},$$

那么 $s_i=(i,i+1), i=1,\cdots,n$，而相应的 Coxeter 元就是

$$s_1\cdots s_n=(12\cdots n+1),$$

它的阶等于 $n+1$. □

例3.3　$B_n, n\geqslant 2$. 令

$$\Delta=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\alpha_n=\varepsilon_n\},$$

这时 Coxeter 元 $s_1\cdots s_n$ 是把 V 中任一向量 $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n (a_i\in\mathbf{R})$ 变到 $-a_n\varepsilon_1+a_1\varepsilon_2+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_n$ 的变换，不难计算它的阶等于 $2n$（习题 3.1）. □

例3.4　$D_n, n\geqslant 4$. 令

$$\Delta=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\alpha_n=\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n\}.$$

这时 Coxeter 元 $s_1\cdots s_n$ 是把 V 中任一向量 $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n (a_i\in\mathbf{R})$ 变到 $-a_n\varepsilon_1+a_1\varepsilon_2+\cdots+a_{n-2}\varepsilon_{n-1}-a_n\varepsilon_n$ 的变换，也不难计算它的阶等于 $2(n-1)$（习题3.1）. □

以后将介绍一个计算 Coxeter 数的一般方法.

因为 W 的 Coxeter 元都共轭，所以它们的特征多项式相同，它们的特征值也一一相同. 设 W 的 Coxeter 数等于 h，而 ζ 是 $\mathbf{C}$ 中的一个本原 h 次单位根，那么 W 的 Coxeter 元的特征值可以表作

$$\zeta^{m_1},\cdots,\zeta^{m_n},$$

其中 $m_1,\cdots,m_n$ 都是整数，而 $0\leqslant m_1,\cdots,m_n\leqslant n$. 不妨假设

$$m_1\leqslant\cdots\leqslant m_n.$$

把它们叫做不可约有限反射群 W 的指数.

例3.1（续1）　$I_2(m), m\geqslant 3$, $I_2(m)$ 的 Coxeter 元 w 是个转 $\frac{2\pi}{m}$

弧度的旋转，把它对于 $\mathbf{R}^2$的基 $\varepsilon_1={}^t(1,0)$，$\varepsilon_2={}^t(0,1)$的矩阵仍记作 w，那么

$$w=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{m} & -\sin\dfrac{2\pi}{m}\\ \sin\dfrac{2\pi}{m} & \cos\dfrac{2\pi}{m}\end{pmatrix}.$$

计算 w 的特征多项式

$$\det(tI-w)=t^2-2\cos\frac{2\pi}{m}+1=(t-\zeta)(t-\zeta^{m-1}),$$

这里

$$\zeta=\frac{\cos 2\pi}{m}+\mathrm{i}\,\frac{\sin 2\pi}{m}.$$

因此 $I_2(m)$的指数是1和 $m-1$. □

例3.2(续1) A_n，$n\geqslant 1$，从例3.2知道 A_n 的 Coxeter 元

$$w=s_1\cdots s_n=(1\ 2\cdots\ n+1)$$

是个 $n+1$阶元. 如果把 A_n 看作作用在 $\mathbf{R}^{n+1}$上的变换群，那么 w 对于 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$这组基的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0 & & & & 1\\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

因此 w 的特征多项式是 $t^{n+1}-1$，已知道 $s(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1})=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}$，$\forall\ s\in W$. 因此 $V=\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^{\perp}=\mathbf{R}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}\alpha_n$ 是子 A_n-空间，这里 $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}$，而 $\mathbf{R}^{n+1}=\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle\oplus V$. W 的 Coxeter 元 w 在$\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle$上的特征多项式是 $t-1$，因此 w 在 V 上的特征多项式就是

$$\frac{t^{n+1}-1}{t-1}=t^n+t^{n-1}+\cdots+1,$$

那么 w 在 V 上的 n 个特征值就是 $\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^n$，这里 ζ 是本原 $n+1$ 次单位根，于是1，2，…，n 就是 A_n 的指数. □

命题3.2 (a) Coxeter 元的特征值都$\neq 1$，即$0<m_i<h,\forall\ i$.

(b) $h-m_1,\cdots,h-m_n$ 是 $m_1,\cdots m_n$ 的一个置换.

(c) $\sum_{i=1}^{m} m_i=nh/2$.

证 (a) 假设1是 Coxeter 元 $w=s_1\cdots s_n$ 的一个特征值，那么有特征向量 $\lambda\in V,\lambda\neq 0$，使 $s_1\cdots s_n\lambda=\lambda$，于是 $s_2\cdots s_n\lambda=s_1\lambda$，但是 $s_2\cdots s_n\lambda-\lambda$ 是 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个线性组合，$s_1\lambda-\lambda$ 是某个实数乘以 α_1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此 $s_2\cdots s_n\lambda=\lambda,s_1\lambda=\lambda$. 于是$(\lambda,\alpha_1)=0$. 对 $s_2\cdots s_n\lambda=\lambda$重复上述推导可得 $s_3\cdots s_n\lambda=\lambda$ 及$(\lambda,\alpha_2)=0$. 如此继续下去，就有$(\lambda,\alpha_i)=0,i=1,\cdots,n$. 于是 $\lambda=0$，这是个矛盾.

(b) $w\in W\subset O(V)$，因此 w 是个实线性变换，它的非实特征值必一对对地互相共轭，一对共轭特征值相应一对指数 m_i 和 $h-m_i$. (a)中已证1不能是 w 的特征值. 如果-1是 w 的特征值，因为 $-1=\zeta^{h/2}$，那么-1相应的指数是 $h/2$，而 $h-h/2=h/2$，因此 $h-m_1,\cdots,h-m_n$一定是 $m_1,\cdots,m_n$ 的一个置换.

(c)是(b)的直接推论. □

还需要下面这条关于半定正实对称矩阵的引理.

设 $A=(a_{ij}),i,j=1,\cdots,n$，是 $n\times n$ 实对称矩阵. 如果有1，…，n 的一个排列 $i_1,\cdots,i_n$ 和正整数 $k(1\leqslant k<n)$，使 $a_{ij}=0$对 $i=i_1,\cdots,i_k$，$j=i_{k+1},\cdots,i_n$ 都成立，A 就叫可分解的；否则，A 叫不可分解的. 设 $x={}^t(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，如果 $x_i>0,\forall\ i=1,\cdots,n$，$x$ 就叫做一个正向量，记$x>0$.

引理3.3 设 $A=(a_{ij})$是 $n\times n$ 实对称矩阵,并假定 A 半定正,不可分解,而且 $a_{ij}\leqslant 0,\forall\ i\neq j$.

(a) 令 $N=\{x\in\mathbf{R}^n \mid Ax=0\}$,$R=\{x\in\mathbf{R}^n \mid {}^t xAx=0\}$,那么 $N=R$ 而且 $\dim N\leqslant 1$,如果 $\dim N=1$,那么 N 含正向量.

(b) A 的最小非零特征值是正的,它的重数等于1,而它相应的特征向量中有一个正向量.

证 (a) 显然 $N\leqslant R$. 还要证明 $R\leqslant N$. 根据线性代数的一条定理,有 $n\times n$ 正交矩阵 P 使

$$D={}^t PAP=[d_1,\cdots,d_n],$$

而 $d_1,\cdots,d_n\in\mathbf{R}$. 设 $x\in\mathbf{R}^n$,即${}^t xAx=0$. 令 $y={}^t Px$,则 $x=Py$,设 $y={}^t(y_1,\cdots,y_n)$,那么

$$0={}^t xAx={}^t y{}^t PAPy={}^t yDy=\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

因为 A 是半定正矩阵,所以 $d_i\geqslant 0$,因此 $d_i y_i=0,\forall\ i$,即 $Dy=0$,因而 $Ax=0$,即 $x\in N$.

假定 $\dim N>0$. 设 $x={}^t(x_1,\cdots,x_n)\in N$, $x\neq 0$. 令 $z={}^t(|x_1|,\cdots,|x_n|)$. 因为 $a_{ij}\leqslant 0,\forall\ i\neq j$,所以

$$0\leqslant {}^t zAz\leqslant {}^t xAx=0,$$

因此 $z\in N$. 再证明 z 的分量都$\neq 0$. 令 $J=\{j \mid 1\leqslant j\leqslant n$ 而 $z_j\neq 0\}$,而 I 是 J 的补集,因为 $z\in N$,所以

$$\sum_{j\in J} a_{ij}z_j=0,\ i=1,\cdots,n.$$

特别,上式对 $i\in I$ 也成立. 因为假设了 $a_{ij}\leqslant 0,\forall\ i\neq j$,所以 $a_{ij}=0$,$\forall\ i\in I,j\in J$,这与 A 是不可分解的假设矛盾,除非 $I=\varnothing$. 这证明了 N 中任意非零向量的分量都$\neq 0$,而 N 含正向量. 如果 $\dim N>1$,那么造 N 中两个线性无关的向量的线性组合就会得到 N 中一个非零向量而它有一个分量等于0,因此 $\dim N\leqslant 1$.

(b) 令 c 表矩阵 A 的最小非零特征值. 因为 A 是半定正的,所以 $c>0$. 矩阵 $A-cI$ 也适合本引理的假设,那么根据上面的证明,

(a)对于 $A-cI$ 成立. 但 $A-cI$ 奇异,因此有一个正向量 ${}^t(c_1,\cdots,c_n)$ 使 $(A-cI){}^t(c_1,\cdots,c_n)=0$. 于是 ${}^t(c_1,\cdots,c_n)$ 是 A 的一个相应特征根 c 的正特征向量. □

命题3.4 设 $n\geqslant 2$,那么 ζ 和 ζ^{h-1} 都是 W 的 Coxeter 元 w 的特征值.

证 先来证明:可以排列 W 的基础反射,使 $s_1,\cdots,s_r$ 两两交换,$s_{r+1},\cdots,s_n$ 也两两交换,对 n 作归纳法,当 $n=2$时,这是显然的. 设 $n>2$,因为 W 的 Coxeter 图 $\Gamma(W)$是树,所以 $\Gamma(W)$有一个顶点只与另外一个顶点有边相连,把相应这个顶点的基础根记作 α_1,把这个顶点和与它相连的边取消后,就得到一个 $n-1$个顶点的 Coxeter 图. 根据归纳法假设,可以排列这 $n-1$个顶点相应的基础反射,使 $s_2,\cdots,s_r$ 两两交换. $s_{r+1},\cdots,s_n$ 两两交换,还可以假设 $\Gamma(W)$中与 α_1相应的顶点与 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 相应的顶点中的一个有边相连,那么 $s_1,s_2,\cdots s_r$ 也两两交换.

令 $y=s_1\cdots s_r,z=s_{r+1}\cdots s_n$,那么 y 和 z 都是2阶元,而 $w=yz$ 是一个 Coxeter 元.

设 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 在 V 中的对偶基,那么

$$(\omega_i,\alpha_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

令 $Y=\mathbf{R}\omega_{r+1}+\cdots+\mathbf{R}\omega_n,Z=\mathbf{R}\omega_1+\cdots+\mathbf{R}\omega_r$,那么 $Y^{\perp}=\mathbf{R}\alpha_1+\cdots+\mathbf{R}\alpha_r,Z^{\perp}=\mathbf{R}\alpha_{r+1}+\cdots+\mathbf{R}\alpha_n$. 令 $H_i=\langle\alpha_i\rangle^{\perp},i=1,\cdots,n$. 于是

$$H_1\cap\cdots\cap H_r=(\mathbf{R}\alpha_1+\cdots+\mathbf{R}\alpha_r)^{\perp}=(Y^{\perp})^{\perp}=Y.$$

同理 $H_{r+1}\cap\cdots\cap H_n=Z$.

令 $A=(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$,即 A 就是 W 的 Coxeter 图 $\Gamma(W)$的 Coxeter 矩阵. 根据命题2.31,A 是定正对称矩阵. 因为 W 不可约,A 还是不可分解的. 根据系理2.12,A 的非对角线元素都是非正的. 那么根据引理3.3,A 有一个正特征值 c,相应的特征向量 ${}^t(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbf{R}^n$,也是正的.

记 $K=\{1,\cdots,n\},I=\{1,\cdots,r\},J=\{r+1,\cdots n\}$. 令

$$\lambda = \sum_{i \in I} c_i \omega_i, \quad \mu = \sum_{j \in J} c_j \omega_j.$$

那么 $\lambda \in Z, \mu \in Y$. 再令 $P = \mathbf{R}\lambda + \mathbf{R}\mu$, 那么 $\dim P = 2$, 要证明 $w(P) = P$. 因有 $A^t(c_1, \cdots, c_n) = c^t(c_1, \cdots, c_n)$, 将这个式子双方求转置就得到 $(c_1, \cdots, c_n)A = c(c_1, \cdots, c_n)$, 即

$$\left(\sum_{k \in K} c_k \alpha_k, \alpha_l\right) = \left(\sum_{k \in K} c c_k \omega_k, \alpha_l\right), \quad l = 1, \cdots, n.$$

因此

$$\sum_{k \in K} c_k \alpha_k = \sum_{k \in K} c c_k \omega_k.$$

总假定根的长都等于1. 对任意 $i \in I$, 将上式与 α_i 作内积, 因为 $(\alpha_i, \alpha_l) = 0$ 对 $i, l \in I$ 而 $i \neq l$, 所以

$$c_i + \sum_{j \in J} c_j a_{ij} = c c_i.$$

再计算

$$\begin{aligned}
(c-1)\lambda &= (c-1)\sum_{i \in I} c_i \omega_i \\
&= \sum_{i \in I}\left(\sum_{j \in J} c_j a_{ij}\right)\omega_i \\
&= \sum_{j \in J} c_j\left(\sum_{i \in I} a_{ij}\omega_i\right) \\
&= \sum_{j \in J} c_j\left(-\omega_j + \sum_{k \in K} a_{kj}\omega_k\right) \\
&= -\sum_{j \in J} c_j \omega_j + \sum_{j \in J} c_j \alpha_j \\
&= -\mu + \nu,
\end{aligned}$$

其中令 $\nu = \sum_{j \in J} c_j \alpha_j$. 上式中第四个等号成立是因为 $a_{kj} = 0, \forall\, k \in J$ 而 $k \neq j$; 上式中第五个等号成立是因为 $\sum_{k \in K} a_{kj}\omega_k = \alpha_j$, 而这个式子可以通过将它双方与 $\alpha_l (l \in K)$ 作内积来证明. 由上式可得 $\nu = (c-1)\lambda + \mu$, 显然 $\nu \in Z^{\perp}$, 因此 $z(\nu) = -\nu$. 因为 $\lambda \in Z$, 所以 $z(\lambda) = \lambda$, 于是 $z(\mathbf{R}\lambda + \mathbf{R}\nu) = \mathbf{R}\lambda + \mathbf{R}\nu$, 但是 $P = \mathbf{R}\lambda + \mathbf{R}\mu = \mathbf{R}\lambda + \mathbf{R}\nu$, 因此

$z(P)=P$，而且 z 在 P 上诱导的变换是个反射，它的反射线(即 z 保待不动的 P 中那些向量所组成的1维子空间)是 $\mathbf{R}\lambda$，同理 $y(P)=P$，而且 y 在 P 上诱导的变换也是个反射，它的反射线是 $\mathbf{R}\mu$，因此 $w=yz$ 是 P 上的旋转.

令

$$C=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\omega_i \mid a_i>0,\forall\ i\right\},$$

那么

$$P\cap C=\{a\lambda+b\mu \mid a,b>0\}.$$

特别 $P\cap C\neq\varnothing$，显然

$$C=\{x\in V \mid (x,\alpha_i)>0,\forall\ i\}.$$

如果 w^l 把 P 中每个向量都保持不动，那么 w^l 也把 $P\cap C$ 中的每个向量保持不动. 根据命题2.28(a)，$w^l=1$. 因此 w 在 P 上的限制的阶等于 w 作为 V 中线性变换的阶. 假设了后者是 h，因此 w 在 P 上的限制阶也是 h. 上面已经证明，w 是 P 上的旋转，因此 w 作为 P 中线性变换的特征值是 ζ 和 ζ^{h-1}，所以 ζ 和 ζ^{h-1}是 V 中线性变换 w 的特征值. □

下面的定理是 Coxeter 于1951年对一个个的不可约有限反射群观察出来的，后来 Steinberg 于1959年先证明了命题3.4，再利用它给出下面定理的统一证明.

定理3.5　设 N 是正根的个数，那么 Coxeter 数 $h=2N/n$.

证　$n=1$的情形是显然的. 设 $n>1$，沿用命题3.4的证明中的记号和结论. 已经知道，平面 P 的旋转 $w|_P$是平面上反射 $y|_P$和 $z|_P$的积，$y|_P$的反射线是 $\mathbf{R}\mu$，$z|_P$的反射线是 $\mathbf{R}\lambda$，而 $w|_P$的阶等于 h. 因此

$$\{w^i(\mathbf{R}\lambda) \mid 0\leqslant i<h-1\}\cup\{w^i(\mathbf{R}\mu) \mid 0\leqslant i<h-1\}$$

一共有 h 条直线，当 h 是奇数时，它们组成$\{w^i \mid 0\leqslant i<h-1\}$的一

条轨道；而当 h 是偶数时，它们分成两条轨道. P 中不在这些直线上的点，都可以从 $P\cap C$ 的点经某个旋转 $w^i(0\leqslant i<h-1)$ 得到. 因为$P\cap C\neq\varnothing$，而 $H_\alpha\cap C=\varnothing$，$\forall\ \alpha\Phi$，所以 $H_\alpha\cap P$ 一定是 $w^i(\mathbf{R}\lambda)$或$w^i(\mathbf{R}\mu)(0\leqslant i\leqslant h-1)$中的一条直线.

因为 $\mathbf{R}\lambda\subset Z=H_{r+1}\cap\cdots\cap H_n$，所以 $H_{r+1},\cdots,H_n$ 中每张超平面和 P 的交都是 $\mathbf{R}\lambda$，再证明没有别的反射超平面 $H_\alpha(\alpha\in\Phi)$和 P 的交等于 $\mathbf{R}\lambda$. 假定 $H_\alpha\cap P=\mathbf{R}\lambda$，可设 $\alpha>0$，那么 $\alpha=\sum\limits_{k\in K}r_k\alpha_k$，$r_k\geqslant 0$. $\lambda\in H_\alpha$ 等价于

$$0=(\lambda,\alpha)=(\sum_{i\in I}c_i\omega_i,\sum_{k\in K}r_k\alpha_k)=\sum_{i\in I}c_ir_i.$$

因为 $c_i>0$，$\forall\ i\in I$，所以 $r_i=0$，$\forall\ i\in I$，因此 $\alpha=\sum\limits_{j\in J}r_j\alpha_j$. 令 $V_J=\sum\limits_{j\in J}\mathbf{R}\alpha_j$. 根据命题2.35($\alpha$)，$\Phi_J=\Phi\cap V_J$ 是 V_J 中的根系而 Φ_J 以$\{\alpha_j|j\in J\}$为基础根系，因为$(\alpha_j,\alpha_l)=0$，$\forall\ j,l\in J$ 而 $j\neq l$，所以$\{\alpha_j|j\in J\}$分解成两两正交的基础根系$\{\alpha_{r+1}\},\cdots,\{\alpha_n\}$的并. 因此如果一个正根是 $\alpha_j(j\in J)$的线性组合，那么它只能是 $\alpha_j(j\in J)$这些根自己. 特别，α 是 $\alpha_j(j\in J)$中的一个. 这证明了，和 P 的交是 $\mathbf{R}\lambda$ 的反射超平面只有 $H_{r+1},\cdots,H_n$.

同理可证，和 P 的交是 $\mathbf{R}\mu$ 的反射超平面只有 $H_1,\cdots,H_r$.

当 h 是偶数时，显然和 P 的交是 $h/2$条两两相异的直线 $w^i(\mathbf{R}\lambda)(i=0,1,\cdots,(h-1)/2)$中一条的反射超平面 H_α 的张数是 $(n-r)h/2$，而和 P 的交是 $h/2$条两两相异的直线 $w^i(\mathbf{R}\mu)(i=0,1,\cdots,(h-1)/2)$中一条的反射超平面 H_α 的张数是 $rh/2$，因此 $N=nh/2$.

当 n 是奇数时，和 P 的交是一条直线 $w^i(\mathbf{R}\lambda)$的反射超平面 H_α 的张数是 $n-r$，一共有 h 条直线 $w^i(\mathbf{R}\lambda)$，所以 $N=(n-r)h$，这 h 条直线也可以表成 $w^i(\mathbf{R}\mu)$，因此又有 $N=rh$. 于是 $r=n/2$，所以也有 $N=nh/2$. □

系理3.6　$\sum_{i=1}^{n} m_i = N = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$.

证　这是上述命题，命题3.2和命题1.26的推论.　□

根据已经算出的各各不可约有限反射群的 N 的值(见表2.1)，可以用公式 $h=2N/n$ 算出它们的 h 的值(见表3.1).

表3.1　不可约有限反射群的正根个数和 Coxeter 数

群	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$I_2(m)$
N	$n(n+1)/2$	n^2	$n(n-1)$	36	63	120	24	6	15	60	m
h	$n+1$	$2n$	$2(n-1)$	12	18	30	12	6	10	30	m

例3.5　H_3. 利用定理3.4，定理3.5和系理3.6可以算出 H_3 的三个指数：$m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_3$. H 的正根个数等于15，从定理3.5可算出 $h=10$，根据命题3.4，$m_1=1$，$m_3=9$. 根据系理3.6，$m_1+m_2+m_3=15$，所以 $m_2=5$.

下面定理也是 Coxeter 于1951年对一个个不可约反射群观察出来的，后来 Coleman 于1958年给出了统一证明.

定理3.7　设 $d_1,\cdots,d_n$ 是 W 的次数，那么 $d_1-1,\cdots,d_n-1$ 就是 W 的指数. 令 $m_1,\cdots,m_n$ 表示 W 的指数，那么 $|W| = \prod_{i=1}^{n}(m_i+1)$.

证　当 $n=1$ 时，本定理显然成立. 设 $n>1$，由表3.1可知 $h>2$，因此本原 h 次单位根不是实的，仍沿用命题3.4的证明中的记号和结论，把欧氏空间 V 的基域扩充到 $\mathbf{C}$，得到 $\mathbf{C}$ 上一个 n 维空间，记作 $V_{\mathbf{C}}$. 再把 V 上内积扩充成 $V_{\mathbf{C}}$ 中酉内积，具体说来，设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，令 $V_{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\varepsilon_1+\cdots+\mathbf{C}\varepsilon_n$，对于 $x=\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$

和 $y=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$，$x_i,y_i\in\mathbf{C}$，定义 $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$. P 自然也扩充成复平面 P_{C}，而 Coxeter 元 w 在 P_{C} 中有两个特征向量 κ 和 $\bar{\kappa}$，它们互相共轭，分别对应特征值 ζ 和 $\bar{\zeta}=\zeta^{h-1}$，这里 ζ 是本原 h 次(复)单位根，h 是 W 的 Coxeter 数. 显然 κ 和 $\bar{\kappa}$ 也张成 P_{C}. 现在去证明 $(\kappa,\alpha)\neq 0$，$\forall\ \alpha\in\Phi$，用反证法，设 $(\kappa,\alpha)=0$ 对某一个 $\alpha\in\Phi$，那么也有 $(\bar{\kappa},\alpha)=0$，因此 $(P_{\mathrm{C}},\alpha)=0$. 在命题3.4中已经证明 P 含 C 的点，所以这是一个矛盾.

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 V_{C} 的一组基，它们分别是 w 的特征向量，相应的特征值是 $\zeta^{m_1},\cdots,\zeta^{m_n}$，而 $m_1=1\leqslant m_2\leqslant\cdots\leqslant m_{n-1}\leqslant m_n=h-1$，可以假设 $\lambda_1=\kappa$，再设 $y_1,\cdots,y_n$ 是相应的坐标函数，即 $y_i(\lambda_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$，那么 $F[V_{\mathrm{C}}^*]=F[y_1,\cdots,y_n]$，而且可以直接验证 $w\cdot y_i=\zeta^{-m_i}y_i$.

设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 W 的一组基本不变式，而 $\deg f_i=d_i$，$i=1,\cdots,n$，可以把它们表成 $y_1,\cdots,y_n$ 的复系数的多项式，而 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)},$$

$x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 是向量空间 V_{C}^* 的两组基，因此

$$\left.\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|_{(c_1,\cdots,c_n)}\neq 0,\text{对任意 }{}^t(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbf{C}^n$$

(习题1.17). 根据命题1.29

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=c\prod_{i=1}^{N}l_i(x_1,\cdots,x_n),$$

其中 $c\in F^*$，而 $l_i(x_1,\cdots,x_n)=c(i=1,\cdots,N)$ 是 W 中 N 个反射超平面 $H_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 的方程，前面已经证明 $\lambda_1\notin H_\alpha$，$\forall\ \alpha\in\Phi$. 设 $\lambda_1=x_1(\lambda_1)\varepsilon_1+\cdots+x_n(\lambda_1)\varepsilon_n$，那么 $l_i(x_1(\lambda_1),\cdots,x_n(\lambda_1))\neq 0$，$\forall\ i=1,\cdots,N$. 记 $x(\lambda_1)=(x_1(\lambda_1),\cdots,x_n(\lambda_1))$，则

$$\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{x(\lambda_1)}\neq 0.$$

再设 $\lambda_1=y_1(\lambda_1)\lambda_1+\cdots+y_n(\lambda_1)\lambda_n$，显然 $(y_1(\lambda_1),\cdots,y_n(\lambda_1))=(1,0,\cdots,0)$，因此

$$\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(f_1,\cdots,f_n)}\right|_{(1,0,\cdots,0)}=\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{x(\lambda_1)}\left.\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|_{(1,0,\cdots,0)}\neq 0$$

因此在 Jacobi 行列式的展开式的 $n!$ 项中至少有一项在 $(1,0,\cdots,0)$ 这一点取值 $\neq 0$，适当排列 $f_1,\cdots,f_n$ 以后可以假定

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(1,0,\cdots,0)\neq 0,\quad i=1,\cdots,n,$$

这就是说，

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}=a_i y_1^{d_i-1}+g_i(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

其中 $a_i\neq 0$，而 $g_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的每一项都至少含 $y_2,\cdots,y_n$ 中的一个，于是

$$f_i=a_i y_1^{d_i-1}y_i+h_i(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

其中 $h_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的每一项都至少含 $y_2,\cdots,y_n$ 中的一个. 将 w 作用到上式双方，因为 $w\cdot y_i=\zeta^{-m_i}y_i$，所以有

$$f_i=w\cdot f_i=a_i\zeta^{1-d_i-m_i}y_1^{d_i-1}y_i+k_i(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

其中 $k_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的每一项都至少含 $y_2,\cdots,y_n$ 中的一个. 因此

$$\zeta^{1-d_i-m_i}=1,\quad i=1,\cdots,n.$$

于是

$$d_i-1\equiv -m_i\equiv h-m_i(\mathrm{mod}\ h),\quad i=1,\cdots,n.$$

根据命题3.2(b)，$h-m_1,\cdots,h-m_n$ 这些数是 $m_1,\cdots,m_n$ 这些数的一个置换，根据系理3.6，它们的和又等于 $\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$. 又因为 $0<h-m_i<h$，所以 $d_i-1=h-m_i$，$i=1,\cdots,n$，即 $d_1-1,\cdots,d_n-1$ 是 W 的指数，这证明了本定理的第一个断言. 从命题1.26和第一个断言立即推出第二个断言.

例3.6 计算群 H_4 的指数. 对于 H_4，已经知道 $N=60$，$h=30$，

$|W|=14\ 400$. 设 $m_1\leqslant m_2\leqslant m_3\leqslant m_4$是 H_4的指数. 已经知道 $m_1=1$, $m_4=29$,根据系理3.6,$1+m_2+m_3+29=60$,因此 $m_2+m_3=30$. 根据定理3.7,$(1+1)(m_2+1)(m_3+1)(29+1)=14\ 400$,因此$(m_2+1)(m_3+1)=240$,联立二次方程

$$\left.\begin{array}{l} m_2+m_3=30 \\ (m_2+1)(m_3+1)=240 \end{array}\right\}$$

的解是11和19,因此 $m_2=11$,$m_3=19$. 于是2,12,20,30就是 H_4的次数. □

系理3.8 纯量变换$-1\in W$ 当且仅当 W 的所有指数都是奇数,或当且仅当所有次数都是偶数.

证 V 上的纯量变换-1诱导出 $F[V^*]$上的一个变换,它在 $F[V^*]_d$上的限制是$(-1)^d$. 如果$-1\in W$,那么 W 不可能有奇次数的齐次不变式. 因此 W 的次数都是偶数,根据定理3.7,W 的指数都是奇数.

反之,设 W 的指数都是奇数. 因为 $h-1$是一个指数,所以 h 是偶数. 令 $z=w^{h/2}$,而 w 是 W 的 Coxeter 元,那么 z 作用在 w 的特征向量 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的结果是将它们分别乘以 $\zeta^{m_1h/2},\cdots,\zeta^{m_nh/2}$,这里 ζ 是 h 次本原单位根. 因为 m_i 都是奇数,$\zeta_i^{m_ih/2}=-1$,$i=1,\cdots,n$. 因此 $z=-1\in W$. □

例3.3(续1) 计算 B_n 的指数,$n\geqslant 2$. 显然$-1\in B_n$,因此根据系理3.8,B_n 的指数都是奇数. 根据例3.3,B_n 的 Coxeter 数等于 $2n$,那么 B_n 的指数都是1和$2n$ 之间的奇数,1和$2n$ 之间一共有 n 个奇数,它们是$1,3,\cdots,2n-1$. 但还要判定,是不是它们都是 B_n 的指数,即有没有重根出现. B_n 的 Coxeter 元 w 对于 $V=\mathbf{R}^n$ 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 w 的特征多项式是 t^n+1，它没有重根. 因此 B_n 的指数就是1，3，…，$2n-1$. □

例3.4(续1)　计算 D_n 的指数，$n\geqslant 4$. 根据例3.4，D_n 的 Coxeter 元 w 的阶是 $2(n-1)$. w 对于 $V=\mathbf{R}^n$ 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -1 & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

因此 w 的特征多项式是 $(t+1)(t^{n-1}+1)$. 设 ζ 是 $2(n-1)$ 次本原单位根，那么 $(t+1)(t^{n-1}+1)$ 的 n 个根就是

$$\zeta^{n-1},\zeta,\zeta^3,\cdots,\zeta^{2n-3}.$$

因此 D_n 的 n 个指数就是1，3，…，$2n-3$，$n-1$. 当 n 是偶数时，$n-1$ 重复出现为 D_n 的指数，当 n 是奇数时，D_n 的 n 个指数两两不同，有 $n-1$ 个奇数1，3，…，$2n-3$ 和1个偶数 $n-1$. □

到此为止，已经算出了不可约有限反射群 $A_n,B_n,D_n,H_3,H_4,I_2(m)$ 的指数. 还要计算 E_6,E_7,E_8,F_4 的指数，这可以利用下面这个命题.

命题3.9　设 W 是不可约 Weyl 群，h 是它的 Coxeter 数，如果

$1\leqslant m\leqslant h-1$而$(m,h)=1$，那么$m$是$W$的一个指数.

证 设Φ是W的根系，那么W的任意元素都把根格$L(\Phi)$变到它自己，选Φ的一组基础根系Δ作为V的一组基，那么W的Coxeter元w相对于这组基的矩阵的矩阵元都是整数，因此w的特征多项式$\det(tI-w)$是整系数多项式. 根据命题3.4有一个本原h次单位根ζ是w的特征值，ζ所适合的$\mathbf{Q}$上的不可约多项式是分圆多项式$\Phi_h(t)$，它是个整系数多项式. 因此$\Phi_h(t)$整除$\det(tI-w)$. $\Phi_h(t)$的所有的根就是所有的本原h次单位根. 因此所有的本原h次单位根ζ^m，$(m,h)=1$，$1\leqslant m\leqslant h-1$，都是$\det(tI-w)$的根，即都是$w$的特征值. 因此所有的$m$，$(m,h)=1$而$1\leqslant m\leqslant h-1$，都是$W$的指数. □

例3.7 利用命题3.9来计算F_4的指数. 前面已经算出了F_4的Coxeter数$h=12$. 因为1，5，7，11都和12互素，所以都是F_4的指数. □

例3.8 计算E_n，$n=6,7,8$的指数. 前面已经算出E_8的Coxeter数$h=30$，1和29之间一共有八个整数与30互素，它们是1，7，11，13，17，19，23，29，因此它们是E_8的指数.

对于E_7，$h=18$. 用命题3.9，求出1，5，7，11，13，17都是E_7的指数，但是E_7一共有七个指数，根据命题3.2，还有一个指数m一定适合条件$m=h-m$，因此$m=h/2=9$.

对于E_6，$h=12$. 根据命题3.9，求出1，5，7，11都是E_6的指数. 设余下的两个指数是m_1和m_2. 根据系理3.6和命题3.7，$1+5+7+11+m_1+m_2=N=36$，$(1+1)(5+1)(7+1)(11+1)(m_1+1)(m_2+1)=|E_6|=2^7\cdot 3^4\cdot 5$. 解这两个联立方程，得$m_1=4$，$m_2=8$. □

所有的不可约有限反射群的指数和次数已经全部求出，把它

们的次数列表如表3.2所示.

表3.2　不可约有限反射群的次数

群	$d_1,\cdots,d_n$
A_n	$2,3,\cdots,n+1$
B_n	$2,4,6,\cdots,2n$
D_n	$2,4,6,\cdots,2(n-1),n$
E_6	$2,5,6,8,9,12$
E_7	$2,6,8,10,12,14,18$
E_8	$2,8,12,14,18,20,24,30$
F_4	$2,6,8,12$
H_3	$2,6,10$
H_4	$2,12,20,30$
$I_2(m)$	$2,m$

§3.2　不可约有限反射群的基本不变式

设 F 是特征0的域，V 是 F 上的 n 维向量空间，G 是作用在 V 上的有限伪反射群. 如果能用某种办法求出 G 的 n 个代数无关的齐次不变式，那么可以用下面这个命题来判断它们是不是一组基本不变式.

命题3.10　设 F 是特征0的域，V 是 F 上的 n 维向量空间，G 是作用在 V 上的有限伪反射群，$g_1,\cdots,g_m$ 是 G 的 n 个代数无关的齐次不变式，它们的次数分别是 $e_1,\cdots,e_m$，如果 $e_1e_2\cdots e_m=|G|$，那么 $g_1,\cdots,g_m$ 就是 G 的一组基本不变式.

证　设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 G 的一组基本不变式，$\deg f_i=d_i(i=1,\cdots,n)$，并假设 $d_1\leqslant\cdots\leqslant d_n$，也可以假设 $e_1\leqslant\cdots\leqslant e_n$. 那么从引理1.27的第一个断言推出 $e_i\leqslant d_i(i=1,\cdots,n)$. 因为 $|G|=d_1\cdots d_n$ 和 $|G|=e_1,\cdots,e_n$，所以 $e_i=d_i(i=1,\cdots,n)$. 再从引理1.27的第二个断言推出 $g_1,\cdots,g_n$ 是 G 的一组基本不变式. □

现在把这个命题应用到 $I_2(m)$，A_n，B_n 和 D_n 这些群上去.

例3.1(续2) $I_2(m)$，$m\geqslant 3$. 仍选 $\varepsilon_1={}^t(1,0)$和 $\varepsilon_2={}^t(0,1)$为 $\mathbf{R}^2$的基，再设 x_1和 x_2是它们的对偶基，即$(x_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant 2)$. 那么 x_1和 x_2也可以看作是 $\mathbf{R}^2$对于 ε_1和 ε_2这组基的坐标函数，即 $x_i(\varepsilon_j)=(x_i,\varepsilon_j)$. $I_2(m)$由两个元素生成，它们对于 ε_1，ε_2这组基的矩阵是

$$\tau=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{m} & -\sin\frac{2\pi}{m}\\ \sin\frac{2\pi}{m} & \cos\frac{2\pi}{m}\end{pmatrix}\text{和 } s=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

τ 是 $\mathbf{R}^2$ 中绕原点转$\frac{2\pi}{m}$弧度角的旋转，$\tau,\tau^2,\cdots,\tau^{m-1},\tau^m=1$就是 $I_2(m)$中的 m 个旋转(包括 $\mathbf{R}^2$的单位变换)；s 是 $\mathbf{R}^2$中以 x_1-x_2轴$=0$为反射直线的反射，$\tau^is\tau^{-i}$就是以 x_1-轴在 τ^i 作用下的像为反射直线的反射，x_1-轴在 τ^i 作用下的像就是与 x_1-轴的夹角为$\frac{2i\pi}{m}$弧度的直线，因此 $s,\tau s\tau^{-1},\cdots,\tau^{m-1}s\tau^{-(m-1)}$就是 $I_2(m)$中的 m 个反射. 显然 $x_1^2+x_2^2$是 $I_2(m)$的2次齐次不变式. 因为 $I_2(m)$的指数是1和 $m-1$ (例3.1(续1)). 所以 $I_2(m)$还有个 m 次齐次不变式，而它和 $x_1^2+x_2^2$ 一起组成 $I_2(m)$的一组基本不变式.

τ 的特征多项式是 $t^2-2\cos\frac{2\pi}{m}+1$，而特征值是 ζ 和 ζ^{-1}，而$\zeta=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$是本原 m 次单位根，${}^t(1,-i)$和${}^t(1,i)$分别是 τ 的相应于 ζ 和 ζ^{-1}的特征向量，于是

$$\tau\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta & \\ & \zeta^{-1}\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}^{-1}\tau\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\zeta & \\ & \zeta^{-1}\end{pmatrix}.$$

同时有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} s \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

把 $\mathbf{R}^2$扩充成 $\mathbf{C}^2$,就有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} I_2(m) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >.$$

把上式右方的群记作 G. 显然 $g_1 = z_1 z_2$和 $g_2 = z_1^m + z_2^m$是 G 的不变齐式,计算 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z_1, z_2)} = \begin{vmatrix} z_2 & z_1 \\ m{z_1}^{m-1} & m{z_2}^{m-1} \end{vmatrix} - m(z_2^m - z_1^m) \neq 0.$$

又有$(\deg g_1)(\deg g_2) = 2m = |G|$,因此根据命题3. 10可知,$g_1$,$g_2$是 G 的一组基本不变式.

经坐标变换

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

g_1和 g_2分别化为

$$h_1 = \frac{1}{4}(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)$$

和

$$h_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^m ((x_1 + ix_2)^m + (x_1 - ix_2)^m)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{j=0}^{[m/2]} (-1)^j \binom{m}{2j} {x_1}^{m-2j} {x_2}^{2j}.$$

所以 h_1和 h_2是 $I_2(m)$的一组基本不变式. 那么

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2 = \sum_{j=0}^{[m/2]} (-1)^j \binom{m}{2j} {x_1}^{m-2j} {x_2}^{2j}$$

也是 $I_2(m)$的一组基本不变式. □

例3. 2(续2)　A_n,$n \geqslant 1$. 从例2. 2已经知道 $A_n = S_{n+1}$可以看作

是作用在 $\mathbf{R}^{n+1}$的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$上的对称群:设 x_1,$\cdots,x_{n+1}$是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$在 $\mathbf{R}^{n+1}$中的对偶基,即

$$(x_i,e_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n+1.$$

那么 S_{n+1}也是作用在 $x_1,\cdots,x_{n+1}$上的对称群,显然

$$s_i=x_1^i+\cdots+x_{n+1}^i,i=1,\cdots,n+1,$$

都是 S_{n+1}的齐次不变式,它们的次数分别是1,2,$\cdots$,$n+1$,这些次数的乘积正好等于$|S_{n+1}|=(n+1)!$:如果能够证明 $s_1,\cdots,s_{n+1}$代数无关,从命题3.10就推出它们是一组基本不变式.

要计算 $s_1,\cdots,s_{n+1}$的 Jacobi 行列式,先算

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_j}=ix_j^{i-1},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n+1.$$

再算 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(s_1,\cdots,s_{n+1})}{\partial(x_1,\cdots,x_{n+1})}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_{n+1} \\ \vdots & & & \\ (n+1)x_1^n & (n+1)x_2^n & & (n+1)x_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

$$=(n+1)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & & \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

其中 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i)\neq 0,$$

因此

$$\frac{\partial(s_1,\cdots,s_{n+1})}{\partial(x_1,\cdots,x_{n+1})}\neq 0$$

根据命题1.28，$s_1,\cdots,s_{n+1}$代数无关.

在例2.2中已经指出$\mathbf{R}^{n+1}$中向量$\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}$在$S_{n+1}$的作用下不变. 令$V=\langle\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n+1}\rangle^{\perp}$，那么$V$是$S_{n+1}$的不可约不变子空间. 显然$\dim V=n$而

$$V=\{a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{n+1}\varepsilon_{n+1}\,|\,a_1+\cdots+a_{n+1=0}\}.$$

把$x_1,\cdots,x_{n+1}$看作V上的线性函数时，它们适合关系式$x_1+\cdots+x_{n+1}=0$，因此可以把$x_1,\cdots,x_n$取作V^*的一组基，而$x_{n+1}=-(x_1+\cdots+x_n)$，令

$$f_i=x_1^{i+1}+\cdots+x_{n+1}^{i+1},i=1,\cdots,n,$$

那么$f_1,\cdots,f_n$是S_{n+1}的齐次不变式，它们的次数分别是$2,3,\cdots n+1$，这些次数的乘积等于$|S_{n+1}|=(n+1)!$如果能够证明$f_1,\cdots,f_n$代数无关，从命题3.10就推出它们是S_{n+1}在V上的一组基本不变式.

计算

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=(i+1)x_j^i-(i+1)x_{n+1}^i,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

再计算$f_1,\cdots,f_n$的Jacobi行列式

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$=\begin{vmatrix} 2(x_1-x_{n+1}) & 2(x_2-x_{n+1}) & \cdots & 2(x_n-x_{n+1}) \\ 3(x_1^2-x_{n+1}^2) & 3(x_2^2-x_{n+1}^2) & \cdots & 3(x_n^2-x_{n+1}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)(x_1^n-x_{n+1}^n) & (n+1)(x_2^n-x_{n+1}^n) & \cdots & (n+1)(x_n^n-x_n^{n+1}) \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)!\begin{vmatrix} x_1-x_{n+1} & x_2-x_{n+1} & \cdots & x_n-x_{n+1} \\ x_1^2-x_{n+1}^2 & x_2^2-x_{n+1}^2 & \cdots & x_n^2-x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n-x_{n+1}^n & x_2^n-x_{n+1}^2 & \cdots & x_n^n-x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$
= (n+1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}
$$

$$
= (n+1)! \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)
$$

$$
= (n+1)! \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x_i + z),
$$

其中 $z = x_1 + \cdots + x_{n+1}$. 因此

$$
\frac{\partial(f_i, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0.
$$

例3.3(续2) $B_n, n \geqslant 2$. 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基. 从例2.3知道, B_n 中一个元素在 $\mathbf{R}^n$ 上的作用, 或者引起 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的一个置换, 或者改变若干个 ε_i 的符号, 或者两者兼有. 再令 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的对偶基, 那么 B_n 中一个元素或者引起 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个置换, 或者改变若干个 x_i 的符号, 或者两者兼有. 令

$$
f_i = x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i}, \quad i = 1, \cdots, n.
$$

显然 f_i 是 B_n 的 $2i$ 次齐次不变式, 而 $2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n) = 2^n n! = |B_n|$. 再计算 $f_1, \cdots, f_n$ 的 Jacobi 行列式

$$
\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = 2^n n! \, x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j^2 - x_i^2) \neq 0.
$$

因此 $f_1, \cdots, f_n$ 是 B_n 的一组基本不变式.

例3.4(续2) $D_n, n \geqslant 4$. 同理, D_n 中一个元素或者引起 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个置换, 或者改变偶数个 x_i 的符号, 或者两者兼有. 令

$$
f_i = x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i}, \quad i = 1, \cdots, n-1,
$$

$$
f_n = x_1 \cdots x_n.
$$

易证 $f_1, \cdots, f_{n-1}, f_n$ 都是 D_n 的齐次不变式, 它们的次数的乘积等

于$2^{n-1}n! = |D_n|$，计算 $f_1,\cdots,f_n$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} = 2^{n-1}(n-1)!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j^2-x_i^2)\neq 0.$$

因此 $f_1,\cdots,f_n$ 是 D_n 的一组基本不变式. □

还需要对群 H_3,H_4,F_4,E_6,E_7,E_8各求出一组基本不变式.

设 W 是作用在 n 维欧氏空间 V 上的不可约有限反射群，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是 V 的一组基，$x_1,\cdots,x_n$ 是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基，如果能够找到一组线性函数 $l_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,l_m(x_1,\cdots,x_n)$，它们在 W 的每个元素的作用下都变到它们自己，即对于任意 $w\in W$ 都有 $w\cdot l_i(x_1,\cdots,x_n)\in\{l_l(x_1,\cdots,x_n),\cdots,l_m(x_1,\cdots,x_n)\}$，那么它们的幂和

$$\sigma_p(l_l\cdots,l_m)=l_l(x_1,\cdots,x_n)^p+\cdots+l_m(x_1,\cdots,x_n)^p,\quad p=1,2,\cdots$$

就是 W 的不变式. 有时适当选取 $l_l(x_1,\cdots,x_n),\cdots,l_m(x_1,\cdots,x_n)$，就能从 $\sigma_p(p=1,2,\cdots)$里挑选出 W 的基本不变式来. Mehta 于1988年用这种方法求出了 $E_n(n=6,7,8)$，F_4和 $H_n(n=3,4)$的基本不变式.

例3.5（续1） H_3. 在2.7节中曾经证明 H_3就是二十面体的对称变换群，二十面体一共有12个顶点，分成六对，每对顶点由对于中心对称的两个顶点组成. 显然 H_3的每个元素都把这六对顶点变到它们自己. 因此也把各对顶点连线的垂直平分面变到它们自己，可以选取坐标使得这六个垂直平分线的方程分别是 $\tau x_1\pm x_2=0$，$\tau x_2\pm x_3=0$，$\tau x_3\pm x_1=0$，这里 $\tau=(1+\sqrt{5})/2$（习题3.6）. 于是下面这12个齐次线性函数

$$\pm\tau x_1\pm x_2,\ \pm\tau x_2\pm x_3,\ \pm\tau x_3\pm x_1$$

在 H_3的每个元素的作用下都变到它们自己. 令

$$I_{2k}=(\tau x_1+x_2)^{2k}+(\tau x_1-x_2)^{2k}+(\tau x_2+x_3)^{2k}+\\(\tau x_2-x_3)^{2k}+(\tau x_3+x_1)^{2k}+(\tau x_3-x_1)^{2k}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} \tau^{2j} (x_1^{2j} x_2^{2k-2j} + x_2^{2j} x_3^{2k-2j} + x_3^{2j} x_1^{2k-2j}),$$

那么 $I_{2k}(k=1,2,\cdots)$都是 H_3的齐次不变式. 根据表3.2, H_3的次数是2,6,10. 试选 I_2, I_6, I_{10}, 计算它们的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(I_2, I_6, I_{10})}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

因此 I_2, I_6, I_{10}是 H_3的一组基本不变式. □

例3.6(续1)　H_4是4维欧氏空间 $\mathbf{R}^4$中正超多面体的对称变换群, 这个正超多面体有120个顶点, 720条边, 1200张面, 600张正四面体面(见 Coxeter1973, 153页). 它的120个顶点分成60对, 每对顶点由对于中心对称的两个顶点组成, 各对顶点连线的垂直平分3维面总共有60张, 它们在 H_4的每个元素的作用下都变到它们自己, 可以选取坐标使得定义这60张3维面的线性函数是

$$\pm 2x_i, i = 1,2,3,4;\ \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4;$$
$$\pm \tau x_1 \pm \tau^{-1} x_2 \pm x_3,\ \pm \tau x_1 \pm \tau^{-1} x_2 \pm x_4,$$
$$\pm \tau x_1 \pm \tau^{-1} x_3 \pm x_4,\ \pm \tau x_2 \pm \tau^{-1} x_3 \pm x_4,$$
$$\pm \tau^{-1} x_1 \pm x_2 \pm \tau x_3,\ \pm \tau^{-1} x_1 \pm x_2 \pm \tau x_4,$$
$$\pm \tau^{-1} x_1 \pm x_3 \pm \tau x,\ \pm \tau^{-1} x_2 \pm x_3 \pm \tau x_4,$$
$$\pm x_1 \pm \tau x_2 \pm \tau^{-1} x_3,\ \pm x_1 \pm \tau x_2 \pm \tau^{-1} x_4,$$
$$\pm x_1 \pm \tau x_3 \pm \tau^{-1} x_4,\ \pm x_2 \pm \tau x_3 \pm \tau^{-1} x_4.$$

定义

$$I_{2k} = \sum_{i=1}^{4} (2x_i)^{2k} + \sum_{a_2, a_3, a_4 = \pm 1} (x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^{2k} + \sum_{(i_1, i_2, i_3)} (\tau x_{i_1} + \tau^{-1} x_{i_2} + x_{i_3})^{2k},$$

这里最后一个求和号是对{1,2,3,4}的所有有序三元子集(i_1, i_2, i_3)求和, 从表2.2知道 H_4的次数是2,12,20,30. 计算 I_2, I_{12}, I_{20}和 I_{30}的 Jacobi 行列式, 它不等于0. 根据命题3.10, I_2, I_{12}, I_{20}和 I_{30}就

是 H_4的一组基本不变式(习题3.7). □

例3.7(续1)　F_4. 根据2.7节关于 F_4的讨论,已经知道 F_4的24个长根

$$\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n,$$

组成一个 F_4-轨道,因此下面这24个线性函数

$$\pm x_i\pm x_j,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n,$$

也组成一个 F_4-轨道. 于是齐次多项式

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\{(x_i+x_j)^{2k}+(x_i-x_j)^{2k}\} \\ &=(8-2^{2k-1})\sigma_{2k}+\sum_{l=1}^{k-1}\binom{2k}{2l}\sigma_{2l}\sigma_{2k-2l},\ k=1,2,\cdots \end{aligned}$$

都是 F_4的不变齐式,这里

$$\sigma_{2k}=x_1^{2k}+x_2^{2k}+x_3^{2k}+x_4^{2k}.$$

由表3.2知 F_4的次数是2,6,8,12,因此试证 I_2,I_6,I_8,I_{12}是 F_4的一组基本不变式,计算

$$\frac{\partial(I_2,I_6,I_8,I_{12})}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}\neq 0$$

(习题3.8). 那么根据命题3.10,I_2,I_6,I_8和 I_{12}确实是 F_4的一组基本不变式. □

例3.8(续1)　$E_n(n=6,7,8)$.

先讨论 E_8. 根据表2.1,$|\Phi(E_8)|=240$,因此 E_8一共有120个反射. 可以选取 $\mathbf{R}^8$的坐标,使这120个反射的反射超平面由下面这240个齐次线性函数所定义,相差一个符号的两个齐次线性函数定义同一张反射超平面. 它们是:

$$+2x_i,i=1,2,\cdots,8;\quad \pm x_i\pm x_j\pm x_k\pm x_l,$$

这里$(ijkl)$可以是(1 2 3 4),(1 2 5 6),(1 2 7 8),(1 3 5 7),(1 3 6 8),(1 4 5 8),(1 4 6 7),(2 3 5 8),(2 3 6 7),(2 4 5 7),(2 4 6 8),

(3 4 5 6),(3 4 7 8),(5 6 7 8)这些有序数组之一. 定义

$$I_{2k}=\sum_{i=1}^{8}(2x_i)^{2k}+\sum_{(ijkl)}\sum_{a_2,a_3,a_4=\pm 1}(x_i+a_2x_j+a_3x_k+a_4x_l)^{2k},$$

这里 $\sum\limits_{(i\,j\,k\,l)}$ 是对上面列出的14个有序数组求和. 从表3.2知道 E_8的次数是2,8,12,14,18,20,24,30. 计算 $I_2,I_8,I_{12},I_{14},I_{18},I_{20},I_{24},I_{30}$的 Jacobi 行列式,它不等于0,因此 $I_2,I_8,I_{12},I_{14},I_{18},I_{20},I_{24},I_{30}$就是 E_8的一组基本不变式.

再讨论 E_7. $|\Phi(E_7)|=126$,因此 E_7一共有63个反射,可以选取 V_7的坐标,使这63个反射的反射超平面由下面这126个齐次线性方程所定义:

$$x_1\pm x_2\pm x_3\pm x_4=0,\ x_1\pm x_2\pm x_5\pm x_6=0,$$
$$x_1\pm x_3\pm x_5\pm x_7=0,\ x_1\pm x_4\pm x_6\pm x_7=0,$$
$$x_2\pm x_3\pm x_6\pm x_7=0,\ x_2\pm x_4\pm x_5\pm x_7=0,$$
$$x_3\pm x_4\pm x_5\pm x_6=0,\ x_i=0,i=1,2,\cdots,7.$$

选下面这56个齐次线性函数,它们在 E_7的每个元素的作用下都变到它们自己. 它们是

$\pm x_1\pm x_2\pm x_7$, $\pm x_1\pm x_3\pm x_6$, $\pm x_1\pm x_4\pm x_5$, $\pm x_2\pm x_3\pm x_5$
$\pm x_2\pm x_4\pm x_6$, $\pm x_3\pm x_4\pm x_7$, $\pm x_5\pm x_6\pm x_7$.

定义

$$I_{2k}=\sum_{(i\,j\,l)}(x_i\pm x_j\pm x_l)^{2k},\quad k=1,2,\cdots,$$

这里 $\sum\limits_{(i\,j\,l)}$ 是对 (1 2 7),(1 3 6),(1 4 5),(2 3 5),(2 4 6),(3 4 7),(5 6 7)这些3-数组求和. 从表3.2知道 E_7的次数是2,6,8,10,12,14,18. 计算 Jacobi 行列式可以证明 $I_2,I_6,I_8,I_{10},I_{12},I_{14},I_{18}$是 E_7的一组基本不变式.

最后讨论 E_6. $|\Phi(E_6)|=72$,因此 E_6有36个反射. 可以选 V_6的坐标,使这36个反射的反射超平面分别由下面这36个齐次线性方程所定义:

$$x_i = 0, i = 1,2,3,4;\ x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0,$$

$$x_1 \pm x_2 \pm \sqrt{2}\,x_5 = 0\ ,\ x_3 \pm x_4 \pm \sqrt{2}\,x_5 = 0,$$

$$x_1 \pm x_3 \pm (1/\sqrt{2})(x_5 - \sqrt{3}\,x_6) = 0,$$

$$x_2 \pm x_4 \pm (1/\sqrt{2})(x_5 - \sqrt{3}\,x_6) = 0,$$

$$x_1 \pm x_4 \pm (1/\sqrt{2})(x_5 + \sqrt{3}\,x_6) = 0,$$

$$x_2 \pm x_3 \pm (1/\sqrt{2})(x_5 + \sqrt{3}\,x_6) = 0.$$

再选下面这27个齐次线性函数，它们在 E_6 的每个元素的作用下都变到它们自己. 它们是

$$2\sqrt{2/3}x_6,\ \sqrt{2/3}(\pm\sqrt{3}\,x_5 - x_6),$$

$$\pm x_1 \pm x_2 - \sqrt{2/3}x_6,\ \pm x_3 \pm x_4 - \sqrt{2/3}x_6,$$

$$\pm x_1 \pm x_3 + (1/\sqrt{6})(\sqrt{3}\,x_5 + x_6),$$

$$\pm x_1 \pm x_4 - (1/\sqrt{6})(\sqrt{3}\,x_5 - x_6)$$

$$\pm x_2 \pm x_3 - (1/\sqrt{6})(\sqrt{3}\,x_5 - x_6),$$

$$\pm x_2 \pm x_4 + (1/\sqrt{6})(\sqrt{3}\,x_5 + x_6).$$

定义 $I_k(k=1,2\cdots)$ 是这27个齐次线性函数的 k 次幂的和. 从表3.2知道可以选 $I_2, I_5, I_6, I_8, I_9, I_{12}$，计算它们的 Jacobi 行列式可以证明它们是 E_6 的一组基本不变式. □

§3.3　有限反射群的 Poincaré 多项式

设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群. 多项式

$$W(t) = \sum_{w\in W} t^{l(w)} \tag{3-1}$$

叫做 W 的 Poincaré 多项式，这里 $l(w)$ 是 W 对于一组基础根系 Δ 的长度函数.

例3.9　设 $W = S_3$，并取(1 2)，(2 3)为基础反射. 那么

(1 2 3)=(1 2)(2 3), (1 3 2)=(2 3)(1 2), (1 3)=(1 2)(2 3)(1 2) 都是既约表达式,因此 $W(t)=1+2t+2t^2+t^3$. □

这一节的目的是推导 W 的 Poincaré 多项式的一个漂亮的因式分解表达式,而 W 的基本不变式的次数巧妙地出现在它里面. 这是有限反射群不变式论的一个重要应用.

定理3.11 设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群,$d_1,d_2,\cdots d_n$ 是 W 的次数,那么

$$W(t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^{d_i}}{1-t} \tag{3-2}$$

这个定理首先由 Chevalley 于1955年对 Weyl 群证明的,目的是用来简化他得到的有限 Lie 型单群的价的公式. 他的证明依赖于以 W 为 Weyl 群的紧 Lie 群的 Poincaré 多项式的一个相关的分解式. Solomon 于1966年对有限反射群给了一个初等证明,但有一个关键性的引理仍用到拓扑,Solomon 于1968年又给出代数证明. Steinberg 于1968年则用较组合性的推导来代替.

为了证明定理3.11,需要作一些准备. 首先,需要有限群上限制和诱导类函数的一些知识.

设 G 是有限群,$\chi:G\to\mathbf{C}$ 是定义在 G 上取复数值的函数. 如果 $\chi(xyx^{-1})=\chi(y),\forall\ x,y\in G$,$\chi$ 就叫 G 上的类函数. 设 H 是 G 的子群,用 χ_H 表示 χ 在 H 上的限制,显然 χ_H 是 H 上的类函数,叫做 χ 在 H 上的限制类函数. 反过来,设 φ 是 H 上的类函数,先定义 $\varphi(g)=0,\forall\ g\in G/H$,再定义

$$\varphi^G(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi(xgx^{-1}).$$

显然 φ^G 是 G 上的类函数,收做 φ 在 G 上的诱导类函数. 用 1_H 表示 H 上的类函数,它的定义是 $1_H(h)=1,\forall\ h\in H$.

引理3.12 (a) $$1_H^G(g) = \frac{1}{|H|}|\{x \in G | xgx^{-1} \in H\}| = \{x^{-1}H \in G/H | gx^{-1}H = x^{-1}H\};$$

(b) 设 χ 是 G 上的类函数,那么 $\chi(1_H^G)=(\chi_H)^G$;

(c) 设 φ 是 H 上的类函数,那么

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(h). \tag{3-3}$$

证 (a) 1_H^G 的意思是 H 上的类函数 1_H 在 G 上诱导的类函数,因此,从诱导类函数的定义立刻推出(a)来.

(b) $(\chi_H)^G$ 的意思是 G 上的类函数 χ 在 H 上的限制 χ_H 在 G 上的诱导类函数. 令 $G(g)=\{x\in G | xgx^{-1}\in H\}$. 计算

$$\begin{aligned}(\chi_H)^G(g) &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\chi_H(xgx^{-1}).\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G(g)}\chi(g)\\ &= \chi(g)\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G(g)}1\\ &= \chi(g)\frac{1}{|H|}|G(g)|\\ &= \chi(g)1_H^G(g). \qquad \text{(根据(a))}\end{aligned}$$

(c) 计算

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi(xgx^{-1})\\ &= \frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in G(g)}\varphi(xgx^{-1})\\ &= \frac{1}{|G||H|}\sum\nolimits_1\varphi(xgx^{-1})\\ &= \frac{1}{|G||H|}\sum_{h\in H}\sum\nolimits_2\varphi(h),\end{aligned} \tag{3-4}$$

其中 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 的求和范围分别是 $\{(g,x)\in G\times G | xgx^{-1}\in H\}$

和$\{(g,x)\in G\times G\mid xgx^{-1}=h\}$. 设$g_0$是$G$中任一元素,用$C_{g_0}$表示$g_0$的共轭元素类,那么$C_{g_0}$中任一元素$g$在$G$中的中心化子$Z_g$的阶都等于$|G|/|C_{g_0}|$. 于是$|\{(g,x)\in G\times G\mid xgx^{-1}=g_0\}|=|C_{g_0}|\cdot|G|/|C_{g_0}|=|G|$. 特别,设$h\in H$, $|\{(g,x)\in G\times G\mid xgx^{-1}=h\}|=|G|$. 因此从(3-4)式推出(3-3)式. □

现在来证明下面这个关键性的引理.

引理3.13 设$S=\{s_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$是$W$的一组基础反射. 对任意$I\subset S$,令$W_I=\langle s_\alpha\mid s_\alpha\in I\rangle$表示由$I$中基础反射生成的$W$的抛物子群,那么

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}1_{W_I}^W(w)=\det w,\quad \forall\, w\in W. \tag{3-5}$$

为了证明这条引理,先考虑得更一般一点. 设$H_1,\cdots,H_r$是n维欧氏空间中的r张超平面,并设$H_i=\{\xi\in V\mid(\xi,\gamma_i)=0\}$,其中$\gamma_i\in V$. 对于$i=1,\cdots,r$,记$H_i=H_i^0$,并定义

$$H_i^+=\{\xi\in V\mid(\xi,\gamma_i)>0\},$$
$$H_i^-=\{\xi\in V\mid(\xi,\gamma_i)<0\}.$$

类似于2.6节中有限反射群W的Coxeter复合形$\mathscr{C}$的定义,从$H_1,\cdots,H_r$出发,来定义一个复合形$\mathscr{K}$. V中形如

$$K=H_1^{\varepsilon_1}\cap\cdots\cap H_r^{\varepsilon_r},\quad \varepsilon_i=\{0,+,-\} \tag{3-6}$$

的子集就定义为$\mathscr{K}$的面,而K张成的向量子空间L的维数就定义为$\dim K$. 显然,L是(3-6)式中出现的所有H_i^0的交,而K是L中一些开半空间的交,因此K是L的开子集. 先证明下面这个引理.

引理 3.14 把$\mathscr{K}$中i维面的个数记作n_i,那么$\sum_i(-1)^i n_i=$

$(-1)^n$.

证　对 r 作归纳法来证明本引理，当 $r=1$ 时，$n_n=2$，$n_{n-1}=1$，$n_i=0(0\leqslant i\leqslant n-2)$，因此引理成立. 现在设 $r>0$，并且假定对于由 r 张超平面定义的复合形本引理成立. 设 $\mathscr{K}_{r+1}$ 是由 $r+1$ 张超平面 $H_1,\cdots,H_{r+1}$ 定义的复合形，把由 $H_1,\cdots,H_r$ 定义的复合形记作 $\mathscr{K}_r$. 根据归纳法假设本引理对 $\mathscr{K}_r$ 成立. 来研究添一张超平面 H_{r+1} 对 $\mathscr{K}_r$ 的影响. 设 K 是 $\mathscr{K}_r$ 的一张面. 如果 $K\cap H_{r+1}=\{0\}$，那么添上 H_{r+1} 对 K 并不起变化. 再设 $x\in K\cap H_{r+1}$ 而 $x\neq 0$. 设 L 是 K 在 V 中张成的向量子空间而 $\dim K=\dim L=i$. 因为 K 是 L 的开子集，所以 x 在 L 中有一个开邻域 $U\cup K$. 因为 $\dim(L\cap H)=\dim L-1$，所以 U 和 H_{r+1}^+ 及 H_{r+1}^- 的交都不空. 这样 K 就是 $\mathscr{K}_{r+1}$ 中两个 i 维面 $K\cap H_{r+1}^+$，$K\cap H_{r+1}^-$ 和一个 $i-1$ 维面 $K\cap H_{r+1}$ 的并. 这样原来的 n_i 和 n_{i-1} 就各增加1，因此和式 $\sum_i(-1)^i n_i$ 没有变化.　□

引理3.13的证明　设 $w\in W$. 令

$$V^1=\{\xi\in V\,|\,w\xi=\xi\}.$$

根据命题2.40，$\mathscr{C}$ 中被 w 保持不变的面就是包含在 V' 中的那些面. 再令

$$\mathscr{K}=\{V'\cap vC_I\,|\,v\in W,I\subset S\},$$

那么 $\mathscr{K}$ 就是由 V' 中超平面 $V\cap H_\alpha(\alpha\in\triangle)$ 定义的复合形. $\mathscr{C}$ 中包含在 V' 中的 i 维面的个数 n_i 就等于 $\mathscr{K}$ 中 i 维面的个数. 设 $\dim V'=c$，根据引理3.14就有 $\sum_i(-1)^i n_i=(-1)^c$. 令 $f_I(w)$ 表示 $\mathscr{C}$ 中被 w 不变的 I 型面的个数. 因为 $\dim vC_I=\dim C_I=n-|I|$，所以

$$n_i=\sum_{|I|=n-i}f_I(w).$$

于是

$$(-1)^n \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} f_I(w) = (-1)^c.$$

$w \in O(V)$，它可能的特征值除了1和-1之外，就是成对的复共轭数. 已设1是 c 重特征值，再设它有 b 对复共轭特征值，那么-1的重数就是 $n-2b-c$. 于是$(-1)^{n-2b-c}=(-1)^{n-c}$. 因此

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} f_I(w) = (-1)^n. \tag{3-7}$$

根据 $f_I(w)$的定义，命题2.40和引理3.12(a)，

$$\begin{aligned} f_I(w) &= \{vC_I \in \mathscr{C} \mid wvC_I = vC_I\} \\ &= \{v \in W \mid v^{-1}wv \in W_I\} = 1_{W_I}^{W}(w). \end{aligned}$$

将(3-7)式中 $f_I(w)$用$1_{W_I}^W(w)$来代替，就得到(3-5)式. □

设 k 是任意非负整数. 用 $F[V^*]_k^W$ 表 W 的 k 次齐次不变式组成的 F 上的向量空间，用 A_k 表示 W 的 k 次 det-相对不变式组成的 F 上的向量空间. 根据命题1.30(c)，$\dim A_k=\dim F[V^*]_{k-N}^W$，这里 N 是 W 的正根个数. 现在设 $I \subset S$，用 $F[V^*]^{W_I}$表示 W 的抛物子群 W_I 的不变式所成的 F-代数；$F[V^*]^{W_I}$也是分次代数. 还需要下面这个交错和.

引理3.15

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \dim F[V^*]_k^{W_I} = \dim A_k. \tag{3-8}$$

证　设 $w \in W$，用 $\mathrm{Tr}_k(w)$表示 w 在 W 的不变子空间 $F[V^*]_k^W$ 上的迹. 对于一个固定的非负整数 k，定义

$$\chi(w) = \mathrm{Tr}_k(w),$$

那么 $\chi(w)$是定义在 W 上的类函数. 把 χ 在 W_I 上的限制类函数简记作 χ_I，根据引理3.12(b)，

$$(\chi_I)^W = \chi(1_{W_I}^W).$$

根据引理3.13

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} (\chi_I)^W(w) = \det(w)\chi(w), \forall\, w \in W. \tag{3-9}$$

将(3-9)式左方对 W 求平均，再利用引理3.12(b)和引理1.14，得到

$$\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}(\chi_I)^W(w)=\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}(\chi_I)^W(w)$$
$$=\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{1}{|W_I|}\sum_{y\in W_I}\chi_I(y)$$
$$=\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\dim F[V^*]_k^{W_I}.$$

将(3-9)式右方对 W 求平均，并将引理1.14用到$(\det w)\mathrm{Tr}_k$ 上，得到

$$\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}(\det w)\chi(w)=\dim A_k,$$

因此(3-8)式成立. □

现在回来讨论 W 的 Poincaré 多项式.

定义 $a_n=|\{w\in W\,|\,l(w)=n\}|$，则

$$W(t)=\sum_{n\geqslant 0}a_nt^n, \tag{3-10}$$

而 $\deg W(t)=N$，这里 N 表示正根个数.

证　(3-10)式十分显然. 根据系理2.21，W 有唯一一个最长元素 w_o，而 $l(w_o)=\frac{1}{2}|\Phi|=N$，因此 $\deg W(t)=N$. □

设 X 是 W 的任意子集，定义

$$X(t)=\sum_{t\in X}t^{l(w)}$$

例如，设 X 是 W 的抛物子群 W_I，$I\subset S$，而 $S=\{S_\alpha\,|\,\alpha\in\Delta\}$，根据命题2.35，$l(w)=l_I(w)$，$\forall\ w\in W_I$ 这里 l_I 是 W_I 的长度函数，因此 $W_I(t)$与有限反射群 W_I 的 Poincaré 多项式相等.

引理3.16　(a)设 W_I 是 W 的抛物子群，而 W^I 是 W 对于 W_I

的极小倍集代表系,则

$$W(t) = W_I(t)W^I(t);$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}W^I(t) = t^N. \quad (3\text{-}11)$$

证 (a)从命题2.35(c)立刻推出.

(b) 第一个等号由(a)推出.现在去证第二个等号成立.设 $w\in W$,来看何时 w 出现在 W^I 中.令 $K=\{s\in S\mid l(ws)>l(w)\}$,那么 $w\in W^I$ 当且仅当 $I\subset K$.因此 $t^{l(w)}$ 在右方和式中的系数等于 $\sum_{I\subset K}(-1)^{|I|}$.如果 $K\neq\varnothing$,根据二项式定理

$$\sum_{I\subset K}(-1)^{|I|} = (1-1)^{|K|} = 0.$$

$K=\varnothing$,当且仅当 $w=w_0$,因此左方和式中只剩下 $t^{l(w_0)}=t^N$ 这一项. □

系理3.17 $\sum_{I\subset S}(-1)^I\frac{|W|}{|W_I|}=1.$

证 将 $t=1$ 代入(3-11)式. □

定理3.11的证明 定义

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^{d_i}}{1-t}$$

对 W 的秩作归纳法来证明 $W(t)=P(t)$.先对于 $P(t)$ 来证明一个类似于(3-11)式的公式

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{P(t)}{P_I(t)} = t^N. \quad (3\text{-}12)$$

上式等价于

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{1}{(1-t)^n P_I(t)} = t^N\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-t^{d_i}}. \quad (3\text{-}13)$$

比较(3-13)式双方的形式幂级数展开式中 t^k 的系数.根据系理1.23,(3-13)式右方 t^k 的系数等于 $\dim F[V^*]^W_{k-N}$,而根据命题

1.28(c)，它又等于 $\dim A_k$. 再来分析(3-13)式左方，令 V_I 表 Δ_I 在 F 上张成的 V 的子空间，把 W_I 看作作用在 V_I 上的有限反射群，设它的次数是 $e_1,\cdots,e_{|I|}$. 因为 W_I 中任一元素在 $V_I^{\perp}$ 上的限制都是单位变换，所以 W_I 作为 V 上的有限反射群，它的次数就是 $e_1,\cdots,e_{|I|},1,\cdots,1$. 于是

$$\frac{1}{(1-t)^n Q_I(t)}=\frac{1}{(1-t^{n-|I|})}\prod_{i=1}^{|I|}\frac{1}{1-t^{e_i}}, \tag{3-14}$$

那么 t^k 在(3-14)式中的系数就是 $F[V^*]_k^{W_I}$. 根据引理3-15，t^k 在(3-13)左方的系数等于 A_k. 这证明了(3-13)式成立.

根据归纳法假设，对于 W 的每个真抛物子群 W_I，都有 $W_I(t)=P_I(t)$. 比较公式(3-11)和(3-12)，立刻得到 $W(t)=Q(t)$.

§3.4 习题

3.1 设 W 是切实地作用在 n 维欧氏空间 V 上的有限反射群，但 W 不一定不可约，指出同样也可以定义 W 的 Coxeter 元和 Coxeter 数，并且命题3.1对 W 也成立. 研究 W 的 Coxeter 元和 Coxeter 数与 W 的不可约因子的 Coxeter 元和 Coxter 数的关系.

3.2 计算 $B_n(n\geqslant 2)$ 和 $D_n(n\geqslant 4)$ 的 Coxeter 数.

3.3 证明：如果 $W=B_n(n\geqslant 2)$，D_n($n\geqslant 4$ 而 n 是偶数)，E_7,E_8,H_3,H_4，$I_2(m)$(m 是偶数)，那么 $-1\in W$；而对于其余的不可约有限反射群 W，$-1\notin W$.

3.4 设 W 是不可约有限反射群，w 是它的一个 Coxeter 元，h 是它的 Coxeter 数，假定 h 是偶数，证明 $l(w^{h/2})=N$，并求 $w^{h/2}$ 的一个既约表示式.

3.5 设 Φ 是 n 维欧氏空间中的晶体根系，$\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 Φ 的一组基础根系，Π 是 Φ 中含 Δ 的正根系. 令 $\sigma=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Pi}\alpha^V$.

(a) 设 Φ 是不可约晶体根系，用 h 表 $W(\Phi)$ 的 Coxeter 数，证明

$$\sum_{\alpha\in\Pi}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha,\alpha}},x\right)^2=h(x,x),\ \forall\ x\in V.$$

(提示：利用习题2.44).

(b) 在(a)的假设下，再设 $\beta=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$ 是 Φ 的最高根，证明 $k_1+\cdots+k_n=h-1$.(提示：计算(β,σ)并利用(b))

(c) 再设 Φ 是 $A_n(n\geqslant 1)$，$D_n(n\geqslant 4)$和 $E_n(n=6,7,8)$之一，而 $\alpha\in\Phi$. 证明 Φ 中不和 α 正交的根的个数等于$4h-8$.

3.6 证明可以在3维欧氏空间中选取坐标，使正二十面体对中心对称的六对顶点的连线的垂直平分面的方程分别是 $\tau x_1\pm x_2=0$，$\tau x_2\pm x_3=0$，$\tau x_3\pm x_1=0$，这里 $\tau=(1+\sqrt{5})/2$. 再证明例3.5(续1)中定义的 H_3的齐次不变式 I_2,I_6,I_{10}的 Jacobi 行列式$\neq 0$，(提示：证明一个多项式$\neq 0$，)只要它在某一点的值$\neq 0$就可以了；例如可以证明 I_2,I_6,I_{10}的 Jacobi 行列式在$((\tau+\omega)/2, \omega(\tau+\omega)/2, \omega^2(\tau+\omega)/2)$这一点的值$\neq 0$，这里 $\omega=e^{2\pi i/3}$)

3.7 补出例3.6(续1)中略去的证明.

3.8 证明例3.7(续1)中 I_2,I_6,I_8,I_{12}的 Jacobi 行列式$\neq 0$.

3.9 补出例3.8(续1)中略去的证明.

3.10 用(3-1)式来直接计算 $I_2(m)(m\geqslant 3)$的 Poincaré 多项式，并将所得结果与用定理3.11直接写出的 $I_2(m)$的 Poincaré 多项式核对一下.

3.11 利用数学归纳法从公式(3-11)算出 $A_n(n\geqslant 1)$的 Poincaré 多项式，再与用定理3.11直接写出的 A_n 的 Poincaré 多项式核对一下.

参 考 资 料

下面只列出与本书内容密切相关的一些资料，可以在 Benson1993和Humphreys1990里找到详尽的参考资料目录.

N. A'Campo (1976) Sur les valeurs propres de la transformation de Coxeter, *Invent. Math.* **33**, 61—67.

H. Asano (1967) A remark on the Coxeter-Killing transformations of finite reflection groups. *Yokohama Math. J.* **15**, 45—49.

D. J. Benson (1993) *Polynomial Invariants of Finite Groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, No. 190.

N Bourbaki (1981) *Groupes et algèbres de Lie, Ch.* 4—6, Hermann, Paris, 1968. Deuxiéme édition, Masson, Paris.

R. W. Carter (1972) *Simple Groups of Lie Type*, J. Wiley & Sons, London.

P. Cartier (1958) Groupes finis engendrés par des symétries, Exposé 14 *Séminaire C. Chevalley* 1956—1958, Paris.

C. Chevalley (1952) The Betli numbers of the exceptional simple Lie groups, *Proc. Intern. Congress of Math. (Cambridge, Mass.* 1950) vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence RI, 21—24.

C. Chevalley (1955a) Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.* 77, 778—782.

C. Chevalley (1955b) Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.* **7**, 14—66.

A. J. Coleman (1958) The betti numbers of the simple Lie groups, *Canad. J. Math.* **10**, 349—356.

A. J. Coleman (1989) Killing and the Coxeter transformation of Kac—Moody algebra, *Invent. Math.* **95**, 447—477.

H. S. M. Coxeter (1934) Discrete groups generated by reflections, *Ann. of Math.* **35**, 588—621.

H. S. M. Coxeter (1935) The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2=(R_iR_j)^{k_{ij}}=1$, *J. London Math. Soc.* **10**, 21—25.

H. S. M. Coxeter (1951) The product of the generators of a finite group

generated by reflections, *Duke Math. J.* **18**, 765—782.

H. S. M. Coxeter (1973). *Regular Polytopes*, 3rd ed., Dover, New York.

L. Flatto (1968) Basic sets of invariauts for finite reflection groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74**, 730—734.

L. Flatto (1978) Invariants of finite reflection groups, *Enseign. Math.* **24**, 237—292.

L Grove and C. T. Benson (1985) *Finite Reflection Groups*, 2nd ed., Springer, New York.

D. Hilbert (1890) Über die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.* **36**, 473—534.

H. L. Hiller (1982) *Geometry of Coxeter Groups*, Research Notes in Mathematics, No. 54, Pitman, Boston.

J. E. Humphreys (1990) *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge university Press, Great Britian.

V. F. Ignatenko (1986) Some questions in the geometric theory of invariants generated by orthogonal and oblique reflections, *J. Soviet Math.* **33**, 933—953.

V. G. Kac and K Watanabe (1982) Finite linear groups whose rings of invariants is a complete intersection, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **6**, 221—223.

I. G. Macdonald (1972) The Poincaré series of a Coxeter group, *Math. Ann.* **199**, 161—174.

M. L. Mehta (1988) Basic sets of invariant polynomials for finite reflection groups, *Comm. Algebra.* **16**, 1083—1098.

T. Molien (1898) Über die Invarianten der lineare Substitutionsgruppen, *Berliner Sitzungsberichte*, 1152—1156.

H. Nakajima (1979) Invariants of finite groups generated by pseudoreflections in positive characteristic, *Tsukuba J. Math.* **3**, 109—122.

E. Noether (1916) Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, *Math. Ann.* **77**, 89—93.

E. Noether (1926) Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p, *Nachr. Gött. Ges. Wissensch*, 28—35.

K. Saito, T. Yano, and J. Sekiguchi (1980) On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, *Comm. Algebra* **8**, 373—408.

J. Sekiguchi and T. Yano (1979a) The algebra of invariants of the Weyl group $W(F_4)$, *Sci. Rep. Saitama Univ. Ser. A* **9**, no. 2, 21—32.

J. Sekiguchi and T. Yano (1979b) A note on the Coxeter group of type H_3, *Sci Rep. Saitama Univ.* Ser. A **9**, no. 2, 33—44.

J. P. Serre(1968) Groupes finis d'automorphisms d'anneaux locaux régulieres, *Colloq. d'Algébre* (Paris, 1967), Secrétariat mathematique, Paris.

G. C. Shephard(1953) Unitary groups generated by reflections, *Canad. J. Math.* **5**, 364—383.

G. C. Shephard(1956) Some problems on finite reflection groups, *Enseign. Math.* **2**, 42—48.

G. C. Shephard and J. A. Todd(1954) Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math* **6**, 274—304.

L. Smith(1985) On the invariant theory of finite pseudo reflection groups, *Arch. Math.* **44**, 225—228.

L. Solomon (1963) Invariants of finite reflection gronps, *Nagoya Math. J.* **22**, 57—64.

L. Solomon (1964) Invariants of Euclidean reflection groups, *Traus. Amer. Math. Soc.* **113**, 274—286.

L. Solomon (1966) The orders of the finite chevalley groups, *J. Algebra* **3**, 376—393.

T. A. Springer (1974) Regular elements of reflection groups, *Invent. Math.* **25**, 159—198.

R. P. Stanley (1979) Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N. S.) **1**, 475—511.

R. Steinberg (1959) Finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **91**, 493—504.

R. Steinberg (1960) Invariants of finite reflection groups, *Canad. J. Math.* **12**, 616—618.

R. Steinberg (1964) Differential equations invariant under finile reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112**, 392—400.

R. Steinberg(1968a) *Lectures on Chevalley Groups*, Yale University, Math. Dept.

R. Steinberg (1968b) *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 80.

T. Uzawa (1986) Finite Coxeter groups and their subgroup lattices, *J.*

Algebra **101**, 82—94.

E. Witt (1941) Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **14**, 289—322.

名 词 索 引